



**Задача №1**

Дано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  (табл.). Найдите: математические ожидания  $E(X)$ ,  $E(Y)$  и  $E(XY)$ ; стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$ , корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ ; условные математические ожидания  $E(Y | X = 0)$ ;  $E(Y | X = 1)$ ;  $E(X | Y = 0)$ ;  $E(X | Y = 1)$ .

	$Y = 0$	$Y = 1$	Всего
$X = 0$	0,2329	0,0234	0,2563
$X = 1$	0,1814	0,5623	0,7437
Всего	0,4143	0,5857	1,0000

**Задача №2**

Завод производит лампы со средней продолжительностью работы 3860 ч. и стандартным отклонением 1310 ч. Известно, что продолжительность работы имеет нормальное распределение. Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 440 ламп. Найдите вероятность того, что:

- 2.1)  $X < 3982$  ч.
- 2.2)  $X > 3699$  ч.
- 2.3)  $3758$  ч.  $< X < 4021$  ч.
- 2.4)  $3738$  ч.  $< X < 3818$  ч.

**Задача №3**

В отделе технического контроля (ОТК) завода из задачи №2 проводится контроль выпущенной партии ламп. Тестируется нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 3860 ч. (стандарт)" против односторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп меньше 3860 ч. (брак)". Тест проводится следующим образом: Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 440 ламп. Если  $X > 3738$  ч., то нулевая гипотеза не отвергается.

- 3.1) Каков статистический размер этого теста?
- 3.2) Какова статистическая мощность рассмотренного теста, если нам известно, что, на самом деле, средняя продолжительность работы ламп не изменилась и равна 3860 ч., а стандартное отклонение составило 1560 ч.

**Задача №4**

В результате анализа получено, что средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 440 ламп, выпущенных заводом из задачи №2, составила 3788 ч.

На каких стандартных уровнях значимости (1%, 5% и 10%) отвергается (на каких - не отвергается) нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 3860 ч." против двухсторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп НЕ равна 3860 ч." (Стандартное отклонение такое же, как и в задаче №2.)

**Задача №5**

Проводится опрос 34356 случайно выбранных потенциальных избирателей. 10996 респондентов ответили, что будут голосовать за "нашего" кандидата, а остальные 23360 – за его соперника. Пусть  $R$  – доля всех избирателей, которые собираются отдать "голос" за "нашего" кандидата.

- 5.1) Используя результаты опроса, оцените величину  $R$  и её стандартное отклонение.
- 5.2) Постройте 95% доверительный интервал для оценки величины  $R$ .

**Задача №6**

В течение года ураган может нанести повреждения дому. Повреждения происходят случайным образом. Пусть  $U$  (в у.е.) – размер повреждений в данном году. Пусть в 15% случаев  $U = 51200$  у.е., в остальных случаях  $U = 0$ .

- 6.1) Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение для среднего выборочного  $\bar{U}$  по выборке из 10770 домов (дома выбираются независимо).
- 6.2) Какова вероятность того, что  $\bar{U}$  больше 8025 у.е.
- 6.3) Чему должно быть равно  $n$  – количество домов в выборке, если вероятность того, что среднее выборочное  $\bar{U}$  меньше 8249 у.е. составила 95%?

**Задача №7**

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 14,8% и стандартным отклонением 5,3%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 5,3% и стандартным отклонением 4,1%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,595.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 99% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

**Задача №8**

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	5,5	10,0	15,1	20,2	24,6	33,0	18,067
Y	4,1	6,9	5,1	11,7	20,9	16,5	10,867
X <sup>2</sup>	30,25	100,00	228,01	408,04	605,16	1089,00	410,077
Y <sup>2</sup>	16,81	47,61	26,01	136,89	436,81	272,25	156,063
XY	22,55	69,00	77,01	236,34	514,14	544,50	243,923

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

**Задача №9**

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 50585(\pm 28103) + 7615(\pm 12692) X_1(i) + 15789(\pm 8772) X_2(i) + 836(\pm 464) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Мужчины с высшим образованием 52 лет"?

9.3) Постройте 90% доверительный интервал для различия доходов "Мужчины с высшим образованием 52 лет" и "Женщины с высшим образованием 52 лет".

**Задача №10**

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 4,652(\pm 3,303) + 0,343(\pm 0,433) \ln X_1(i) + 0,006(\pm 0,008) X_2(i) + 0,021(\pm 0,06) X_3(i) + 0,018(\pm 0,041) X_4(i) + 0,023(\pm 0,007) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,141; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 45% и количество спален уменьшилось на 1. Постройте 95% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом испортить «прекрасный вид». Постройте 90% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,7437$	$\sigma(X) = 0,4366$	$E(Y   X = 0) = 0,0913$
$E(Y) = 0,5857$	$\sigma(Y) = 0,4926$	$E(Y   X = 1) = 0,7561$
$E(XY) = 0,5623$	$\text{cov}(X; Y) = 0,1267$	$E(X   Y = 0) = 0,4378$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,5891$	$E(X   Y = 1) = 0,9600$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 62,452 часов.

2.1) 97,5%	2.2) 99,5%	2.3) 94,5%	2.4) 22,5%
------------	------------	------------	------------

**Задачи №3–4**

3.1) 2,5%	3.2) 5%	4) НЕ отвергаем на всех уровнях значимости.
-----------	---------	---

**Задача №5**

$R = 0,32006$	$\sigma = 0,00252$	$[0,31512; 0,32500]$
---------------	--------------------	----------------------

**Задачи №6**

6.1) $E = 7680,00$ у.е.	$\sigma = 176,16$ у.е.	6.2) 2,5%	6.3) 2777 шт.
-------------------------	------------------------	-----------	---------------

**Задача №7**

$W = 0,2038$	$R_{\text{опт}} = 7,236\%$	$\sigma_{\text{опт}} = 4,002\%$	$[-3,09\%; 17,56\%]$
--------------	----------------------------	---------------------------------	----------------------

**Задача №8**

$D(X) = 100,3926$	$\sigma(X) = 10,0196$	$\text{Cov}(X; Y) = 57,1067$
$D(Y) = 45,5656$	$\sigma(Y) = 6,7502$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,8443$
$\beta_1 = 0,5688$	$\beta_0 = 0,5905$	
$\text{TSS} = 227,828$	$\text{ESS} = 162,4211$	$\text{RSS} = 65,4069$
$R^2 = 0,7129$	$R^2_{\text{adj}} = 0,6411$	$F = 9,933$

Модель ЗНАЧИМА на 5% уровне значимости и НЕ Значима на 1%.

**Задача №9**

9.1)	$t_0 = 1,8^*$	$t_1 = 0,6$ не знач.
	$t_2 = 1,8^*$	$t_3 = 1,8^*$
9.2)	$Y = 117\,461$ руб.	
9.3)	$\Delta Y = -7\,615$	$\sigma = 12\,692$
		$[-28429,9; 13199,9]$

**Задачи №10**

10.1)	$\Delta \ln Y = 0,1214$	$\sigma(\Delta \ln Y) = 0,16$	$[-0,1922; 0,435]$
	$Y_2/Y_1 = 1,1291$ (Увеличилась на 12,91%)		$[-17,49\%; 54,5\%]$
10.2)	$\Delta \ln Y = 0,003$	$\sigma(\Delta \ln Y) = 0,0727$	$[-0,1162; 0,1222]$
	$Y_2/Y_1 = 1,003$ (Увеличилась на 0,3%)		$[-10,97\%; 13\%]$

**Задача №1**

Дано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  (табл.). Найдите: математические ожидания  $E(X)$ ,  $E(Y)$  и  $E(XY)$ ; стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$ , корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ ; условные математические ожидания  $E(Y | X = 0)$ ;  $E(Y | X = 1)$ ;  $E(X | Y = 0)$ ;  $E(X | Y = 1)$ .

	$Y = 0$	$Y = 1$	Всего
$X = 0$	0,2678	0,1434	0,4112
$X = 1$	0,3038	0,2850	0,5888
Всего	0,5716	0,4284	1,0000

**Задача №2**

Завод производит лампы со средней продолжительностью работы 7300 ч. и стандартным отклонением 2180 ч. Известно, что продолжительность работы имеет нормальное распределение. Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 810 ламп. Найдите вероятность того, что:

- 2.1)  $X < 7249$  ч.
- 2.2)  $X > 7102$  ч.
- 2.3)  $7426$  ч.  $< X < 7498$  ч.
- 2.4)  $7249$  ч.  $< X < 7450$  ч.

**Задача №3**

В отделе технического контроля (ОТК) завода из задачи №2 проводится контроль выпущенной партии ламп. Тестируется нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 7300 ч. (стандарт)" против односторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп меньше 7300 ч. (брак)". Тест проводится следующим образом: Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 810 ламп. Если  $X > 7174$  ч., то нулевая гипотеза не отвергается.

- 3.1) Каков статистический размер этого теста?
- 3.2) Какова статистическая мощность рассмотренного теста, если нам известно, что, на самом деле, средняя продолжительность работы ламп составила 7225 ч., а стандартное отклонение не изменилось и равно 2180 ч.

**Задача №4**

В результате анализа получено, что средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 810 ламп, выпущенных заводом из задачи №2, составила 7438 ч.

На каких стандартных уровнях значимости (1%, 5% и 10%) отвергается (на каких - не отвергается) нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 7300 ч." против двухсторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп НЕ равна 7300 ч." (Стандартное отклонение такое же, как и в задаче №2.)

**Задача №5**

Проводится опрос 54813 случайно выбранных потенциальных избирателей. 40288 респондентов ответили, что будут голосовать за "нашего" кандидата, а остальные 14525 – за его соперника. Пусть  $R$  – доля всех избирателей, которые собираются отдать "голос" за "нашего" кандидата.

- 5.1) Используя результаты опроса, оцените величину  $R$  и её стандартное отклонение.
- 5.2) Постройте 90% доверительный интервал для оценки величины  $R$ .

**Задача №6**

В течение года ураган может нанести повреждения дому. Повреждения происходят случайным образом. Пусть  $U$  (в у.е.) – размер повреждений в данном году. Пусть в 35% случаев  $U = 9100$  у.е., в остальных случаях  $U = 0$ .

- 6.1) Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение для среднего выборочного  $\bar{U}$  по выборке из 2590 домов (дома выбираются независимо).
- 6.2) Какова вероятность того, что  $\bar{U}$  больше 3405 у.е.
- 6.3) Чему должно быть равно  $n$  – количество домов в выборке, если вероятность того, что среднее выборочное  $\bar{U}$  меньше 3279 у.е. составила 97,5%?

**Задача №7**

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 8,7% и стандартным отклонением 4,3%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 5% и стандартным отклонением 3%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,638.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 95% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

**Задача №8**

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	1,1	3,3	4,5	14,4	25,3	26,8	12,567
Y	2,3	7,4	20,8	22,7	43,5	40,1	22,800
X <sup>2</sup>	1,21	10,89	20,25	207,36	640,09	718,24	266,340
Y <sup>2</sup>	5,29	54,76	432,64	515,29	1892,25	1608,01	751,373
XY	2,53	24,42	93,60	326,88	1100,55	1074,68	437,110

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

**Задача №9**

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 57220(\pm 25207) + 14727(\pm 4781) X_1(i) + 18575(\pm 6031) X_2(i) + 1120(\pm 970) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Мужчины с высшим образованием 37 лет"?

9.3) Постройте 99% доверительный интервал для различия доходов "Мужчины с высшим образованием 37 лет" и "Женщины с высшим образованием 37 лет".

**Задача №10**

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 8,242(\pm 5,761) + 0,56(\pm 0,753) \ln X_1(i) + 0,014(\pm 0,012) X_2(i) + 0,097(\pm 0,04) X_3(i) + 0,078(\pm 0,106) X_4(i) + 0,008(\pm 0,046) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,635; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 47% и количество спален увеличилось на 2. Постройте 99% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом испортить «прекрасный вид». Постройте 95% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,5888$	$\sigma(X) = 0,4921$	$E(Y   X = 0) = 0,3487$
$E(Y) = 0,4284$	$\sigma(Y) = 0,4948$	$E(Y   X = 1) = 0,4840$
$E(XY) = 0,2850$	$\text{cov}(X; Y) = 0,0328$	$E(X   Y = 0) = 0,5315$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,1347$	$E(X   Y = 1) = 0,6653$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 76,597 часов.

2.1) 25%	2.2) 99,5%	2.3) 4,5%	2.4) 72,5%
----------	------------	-----------	------------

**Задачи №3–4**

3.1) 5%	3.2) 25%	4) Отвергаем на 10%; НЕ отвергаем на 1% и 5% уровнях значимости.
---------	----------	--

**Задача №5**

$R = 0,73501$	$\sigma = 0,00189$	$[0,73191; 0,73811]$
---------------	--------------------	----------------------

**Задачи №6**

6.1) $E = 3185,00$ у.е.	$\sigma = 85,29$ у.е.	6.2) 0,5%	6.3) 8191 шт.
-------------------------	-----------------------	-----------	---------------

**Задача №7**

$W = 0,0698$	$R_{\text{опт}} = 5,258\%$	$\sigma_{\text{опт}} = 2,991\%$	$[-0,60\%; 11,12\%]$
--------------	----------------------------	---------------------------------	----------------------

**Задача №8**

$D(X) = 130,0926$	$\sigma(X) = 11,4058$	$\text{Cov}(X; Y) = 180,6989$
$D(Y) = 277,8396$	$\sigma(Y) = 16,6685$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,9505$
$\beta_1 = 1,389$	$\beta_0 = 5,3444$	
$\text{TSS} = 1\,389,198$	$\text{ESS} = 1\,254,9558$	$\text{RSS} = 134,2422$
$R^2 = 0,9034$	$R^2_{\text{adj}} = 0,8792$	$F = 37,3938$

Модель ЗНАЧИМА на всех уровнях значимости.

**Задача №9**

9.1)	$t_0 = 2,27$ **	$t_1 = 3,08$ ***
	$t_2 = 3,08$ ***	$t_3 = 1,15$ не знач.

9.2)	$Y = 131\,962$ руб.
------	---------------------

9.3) $\Delta Y = -14\,727$	$\sigma = 4\,781$	$[-27062,0; -2392,0]$
----------------------------	-------------------	-----------------------

**Задачи №10**

10.1) $\Delta \text{Ln} Y = 0,2437$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,3059$	$[-0,5455; 1,0329]$
$Y_2/Y_1 = 1,276$ (Увеличилась на 27,6%)		$[-42,04\%; 180,92\%]$

10.2) $\Delta \text{Ln} Y = 0,019$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,1133$	$[-0,2031; 0,2411]$
$Y_2/Y_1 = 1,0192$ (Увеличилась на 1,92%)		$[-18,38\%; 27,26\%]$

**Задача №1**

Дано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  (табл.). Найдите: математические ожидания  $E(X)$ ,  $E(Y)$  и  $E(XY)$ ; стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$ , корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ ; условные математические ожидания  $E(Y | X = 0)$ ;  $E(Y | X = 1)$ ;  $E(X | Y = 0)$ ;  $E(X | Y = 1)$ .

	$Y = 0$	$Y = 1$	Всего
$X = 0$	0,1132	0,2390	0,3522
$X = 1$	0,2862	0,3616	0,6478
Всего	0,3994	0,6006	1,0000

**Задача №2**

Завод производит лампы со средней продолжительностью работы 10250 ч. и стандартным отклонением 1570 ч. Известно, что продолжительность работы имеет нормальное распределение. Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 220 ламп. Найдите вероятность того, что:

- 2.1)  $X < 10076$  ч.
- 2.2)  $X > 10457$  ч.
- 2.3)  $10043$  ч.  $< X < 10523$  ч.
- 2.4)  $10321$  ч.  $< X < 10424$  ч.

**Задача №3**

В отделе технического контроля (ОТК) завода из задачи №2 проводится контроль выпущенной партии ламп. Тестируется нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 10250 ч. (стандарт)" против односторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп меньше 10250 ч. (брак)". Тест проводится следующим образом: Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 220 ламп. Если  $X > 9977$  ч., то нулевая гипотеза не отвергается.

- 3.1) Каков статистический размер этого теста?
- 3.2) Какова статистическая мощность рассмотренного теста, если нам известно, что, на самом деле, средняя продолжительность работы ламп не изменилась и равна 10250 ч., а стандартное отклонение составило 2469 ч.

**Задача №4**

В результате анализа получено, что средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 220 ламп, выпущенных заводом из задачи №2, составила 9924 ч.

На каких стандартных уровнях значимости (1%, 5% и 10%) отвергается (на каких - не отвергается) нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 10250 ч." против двухсторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп НЕ равна 10250 ч." (Стандартное отклонение такое же, как и в задаче №2.)

**Задача №5**

Проводится опрос 39172 случайно выбранных потенциальных избирателей. 29087 респондентов ответили, что будут голосовать за "нашего" кандидата, а остальные 10085 – за его соперника. Пусть  $R$  – доля всех избирателей, которые собираются отдать "голос" за "нашего" кандидата.

- 5.1) Используя результаты опроса, оцените величину  $R$  и её стандартное отклонение.
- 5.2) Постройте 99% доверительный интервал для оценки величины  $R$ .

**Задача №6**

В течение года ураган может нанести повреждения дому. Повреждения происходят случайным образом. Пусть  $U$  (в у.е.) – размер повреждений в данном году. Пусть в 26% случаев  $U = 2600$  у.е., в остальных случаях  $U = 0$ .

- 6.1) Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение для среднего выборочного  $\bar{U}$  по выборке из 9690 домов (дома выбираются независимо).
- 6.2) Какова вероятность того, что  $\bar{U}$  больше 699 у.е.
- 6.3) Чему должно быть равно  $n$  – количество домов в выборке, если вероятность того, что среднее выборочное  $\bar{U}$  меньше 667 у.е. составила 25%?

**Задача №7**

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 16,8% и стандартным отклонением 7,8%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 5,5% и стандартным отклонением 4%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,331.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 90% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

**Задача №8**

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	5,9	15,1	16,4	27,4	36,1	39,9	23,467
Y	9,1	30,4	65,6	134,2	99,3	127,1	77,617
X <sup>2</sup>	34,81	228,01	268,96	750,76	1303,21	1592,01	696,293
Y <sup>2</sup>	82,81	924,16	4303,36	18009,64	9860,49	16154,41	8222,478
XY	53,69	459,04	1075,84	3677,08	3584,73	5071,29	2320,278

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

**Задача №9**

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 58883(\pm 25940) + 11626(\pm 10066) X_1(i) + 21317(\pm 9391) X_2(i) + 783(\pm 435) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Женщины с высшим образованием 25 лет"?

9.3) Постройте 95% доверительный интервал для различия доходов "Женщины с высшим образованием 25 лет" и "Женщины с высшим образованием 54 лет".

**Задача №10**

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 5,748(\pm 4,202) + 0,396(\pm 0,448) \ln X_1(i) + 0,014(\pm 0,008) X_2(i) + 0,11(\pm 0,088) X_3(i) + 0,066(\pm 0,055) X_4(i) + 0,012(\pm 0,016) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,907; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 49% и количество спален уменьшилось на 3. Постройте 99% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом НЕ испортить «прекрасный вид». Постройте 90% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.



**Задача №1**

$E(X) = 0,6478$	$\sigma(X) = 0,4777$	$E(Y   X = 0) = 0,6786$
$E(Y) = 0,6006$	$\sigma(Y) = 0,4898$	$E(Y   X = 1) = 0,5582$
$E(XY) = 0,3616$	$\text{cov}(X; Y) = -0,0275$	$E(X   Y = 0) = 0,7166$
	$\text{corr}(X; Y) = -0,1175$	$E(X   Y = 1) = 0,6021$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 105,849 часов.

2.1) 5%                      2.2) 2,5%                      2.3) 97%                      2.4) 20%

**Задачи №3–4**

3.1) 0,5%    3.2) 5%    4) Отвергаем на всех уровнях значимости.

**Задача №5**R = 0,74255                       $\sigma = 0,00221$                       [0,73685; 0,74825]**Задачи №6**6.1) E = 676,00 у.е.                       $\sigma = 11,59$  у.е.                      6.2) 2,5%                      6.3) 7209 шт.**Задача №7**W = 0,1010                       $R_{\text{опт}} = 6,641\%$                        $\sigma_{\text{опт}} = 3,928\%$                       [0,20%; 13,08%]**Задача №8**

$D(X) = 174,7115$	$\sigma(X) = 13,2178$	$\text{Cov}(X; Y) = 598,6078$
$D(Y) = 2\,637,6952$	$\sigma(Y) = 51,3585$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,8818$
$\beta_1 = 3,4263$	$\beta_0 = -2,788$	
TSS = 13\,188,476	ESS = 10\,254,9431	RSS = 2\,933,5329
$R^2 = 0,7776$	$R^2_{\text{adj}} = 0,722$	F = 13,9831

Модель ЗНАЧИМА на 5% уровне значимости и НЕ Значима на 1%.

**Задача №9**9.1)                       $t_0 = 2,27^{**}$                        $t_1 = 1,15$  не знач.  
                                  $t_2 = 2,27^{**}$                        $t_3 = 1,8^*$ 

9.2)                      Y = 99\,775 руб.

9.3)  $\Delta Y = 22\,707$                        $\sigma = 12\,615$                       [-2018,4; 47432,4]**Задачи №10**10.1)  $\Delta \ln Y = 0,1159$                        $\sigma(\Delta \ln Y) = 0,1572$                       [-0,2897; 0,5215]  
 $Y_2/Y_1 = 1,1229$  (Увеличилась на 12,29%)                      [-25,15%; 68,46%]  
10.2)  $\Delta \ln Y = 0,122$                        $\sigma(\Delta \ln Y) = 0,0894$                       [-0,0246; 0,2686]  
 $Y_2/Y_1 = 1,1298$  (Увеличилась на 12,98%)                      [-2,43%; 30,81%]



**Задача №1**

Дано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  (табл.). Найдите: математические ожидания  $E(X)$ ,  $E(Y)$  и  $E(XY)$ ; стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$ , корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ ; условные математические ожидания  $E(Y | X = 0)$ ;  $E(Y | X = 1)$ ;  $E(X | Y = 0)$ ;  $E(X | Y = 1)$ .

	$Y = 0$	$Y = 1$	Всего
$X = 0$	0,0310	0,0560	0,0870
$X = 1$	0,2839	0,6291	0,9130
Всего	0,3149	0,6851	1,0000

**Задача №2**

Завод производит лампы со средней продолжительностью работы 6270 ч. и стандартным отклонением 1160 ч. Известно, что продолжительность работы имеет нормальное распределение. Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 1070 ламп. Найдите вероятность того, что:

2.1)  $X < 6340$  ч.

2.2)  $X > 6212$  ч.

2.3)  $6200$  ч.  $< X < 6246$  ч.

2.4)  $6179$  ч.  $< X < 6340$  ч.

**Задача №3**

В отделе технического контроля (ОТК) завода из задачи №2 проводится контроль выпущенной партии ламп. Тестируется нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 6270 ч. (стандарт)" против односторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп меньше 6270 ч. (брак)". Тест проводится следующим образом: Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 1070 ламп. Если  $X > 6179$  ч., то нулевая гипотеза не отвергается.

3.1) Каков статистический размер этого теста?

3.2) Какова статистическая мощность рассмотренного теста, если нам известно, что, на самом деле, средняя продолжительность работы ламп не изменилась и равна 6270 ч., а стандартное отклонение составило 1519 ч.

**Задача №4**

В результате анализа получено, что средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 1070 ламп, выпущенных заводом из задачи №2, составила 6190 ч.

На каких стандартных уровнях значимости (1%, 5% и 10%) отвергается (на каких - не отвергается) нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 6270 ч." против двухсторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп НЕ равна 6270 ч." (Стандартное отклонение такое же, как и в задаче №2.)

**Задача №5**

Проводится опрос 33820 случайно выбранных потенциальных избирателей. 10327 респондентов ответили, что будут голосовать за "нашего" кандидата, а остальные 23493 – за его соперника. Пусть  $R$  – доля всех избирателей, которые собираются отдать "голос" за "нашего" кандидата.

5.1) Используя результаты опроса, оцените величину  $R$  и её стандартное отклонение.

5.2) Постройте 95% доверительный интервал для оценки величины  $R$ .

**Задача №6**

В течение года ураган может нанести повреждения дому. Повреждения происходят случайным образом. Пусть  $U$  (в у.е.) – размер повреждений в данном году. Пусть в 5% случаев  $U = 32600$  у.е., в остальных случаях  $U = 0$ .

6.1) Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение для среднего выборочного  $\bar{U}$  по выборке из 6960 домов (дома выбираются независимо).

6.2) Какова вероятность того, что  $\bar{U}$  больше 1573 у.е.

6.3) Чему должно быть равно  $n$  – количество домов в выборке, если вероятность того, что среднее выборочное  $\bar{U}$  меньше 1806 у.е. составила 95%?

**Задача №7**

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 16,3% и стандартным отклонением 4%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 8,2% и стандартным отклонением 2,9%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,317.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 99% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

**Задача №8**

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	5,9	10,3	17,4	26,9	29,7	32,3	20,417
Y	4,2	12,0	32,5	55,4	33,8	37,4	29,217
X <sup>2</sup>	34,81	106,09	302,76	723,61	882,09	1043,29	515,442
Y <sup>2</sup>	17,64	144,00	1056,25	3069,16	1142,44	1398,76	1138,042
XY	24,78	123,60	565,50	1490,26	1003,86	1208,02	736,003

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

**Задача №9**

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 38030(\pm 32926) + 13552(\pm 5970) X1(i) + 23005(\pm 10134) X2(i) + 588(\pm 980) X3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Мужчины с высшим образованием 40 лет"?

9.3) Постройте 99% доверительный интервал для различия доходов "Мужчины с высшим образованием 40 лет" и "Мужчины с высшим образованием 34 лет".

**Задача №10**

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 6,562(\pm 4,554) + 0,669(\pm 0,723) \ln X1(i) + 0,014(\pm 0,012) X2(i) + 0,044(\pm 0,021) X3(i) + 0,11(\pm 0,024) X4(i) + 0,017(\pm 0,007) X3(i) X4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X1$  – площадь дома;  $X2$  – количество спален;  $X3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,563; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 21% и количество спален уменьшилось на 2. Постройте 95% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом испортить «прекрасный вид». Постройте 90% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,9130$	$\sigma(X) = 0,2818$	$E(Y   X = 0) = 0,6437$
$E(Y) = 0,6851$	$\sigma(Y) = 0,4645$	$E(Y   X = 1) = 0,6890$
$E(XY) = 0,6291$	$\text{cov}(X; Y) = 0,0036$	$E(X   Y = 0) = 0,9016$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,0275$	$E(X   Y = 1) = 0,9183$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 35,462 часов.

2.1) 97,5%	2.2) 95%	2.3) 22,5%	2.4) 97%
------------	----------	------------	----------

**Задачи №3–4**

3.1) 0,5%	3.2) 2,5%	4) Отвергаем на 5% и 10%; НЕ отвергаем на 1% уровне значимости.
-----------	-----------	---

**Задача №5**

$R = 0,30535$	$\sigma = 0,00250$	$[0,30045; 0,31025]$
---------------	--------------------	----------------------

**Задачи №6**

6.1) $E = 1630,00$ у.е.	$\sigma = 85,16$ у.е.	6.2) 75%	6.3) 4384 шт.
-------------------------	-----------------------	----------	---------------

**Задача №7**

$W = 0,2775$	$R_{\text{опт}} = 10,448\%$	$\sigma_{\text{опт}} = 2,664\%$	$[3,57\%; 17,32\%]$
--------------	-----------------------------	---------------------------------	---------------------

**Задача №8**

$D(X) = 118,3057$	$\sigma(X) = 10,8768$	$\text{Cov}(X; Y) = 167,3754$
$D(Y) = 341,2907$	$\sigma(Y) = 18,4741$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,833$
$\beta_1 = 1,4148$	$\beta_0 = 0,331$	
$\text{TSS} = 1\,706,4535$	$\text{ESS} = 1\,183,9888$	$\text{RSS} = 522,4647$
$R^2 = 0,6938$	$R^2_{\text{adj}} = 0,6173$	$F = 9,0646$

Модель ЗНАЧИМА на 5% уровне значимости и НЕ Значима на 1%.

**Задача №9**

9.1)	$t_0 = 1,16$ не знач.	$t_1 = 2,27$ **
	$t_2 = 2,27$ **	$t_3 = 0,6$ не знач.

9.2)	$Y = 98\,107$ руб.
------	--------------------

9.3) $\Delta Y = -3\,528$	$\sigma = 5\,880$	$[-18698,4; 11642,4]$
---------------------------	-------------------	-----------------------

**Задачи №10**

10.1) $\Delta \ln Y = 0,0995$	$\sigma(\Delta \ln Y) = 0,1259$	$[-0,1473; 0,3463]$
$Y_2/Y_1 = 1,1046$ (Увеличилась на 10,46%)		$[-13,7\%; 41,38\%]$
10.2) $\Delta \ln Y = -0,066$	$\sigma(\Delta \ln Y) = 0,0319$	$[-0,1183; -0,0137]$
$Y_2/Y_1 = 0,9361$ (Уменьшилась на 6,39%)		$[-11,16\%; -1,36\%]$



**Задача №1**

Дано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  (табл.). Найдите: математические ожидания  $E(X)$ ,  $E(Y)$  и  $E(XY)$ ; стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$ , корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ ; условные математические ожидания  $E(Y | X = 0)$ ;  $E(Y | X = 1)$ ;  $E(X | Y = 0)$ ;  $E(X | Y = 1)$ .

	$Y = 0$	$Y = 1$	Всего
$X = 0$	0,3087	0,2072	0,5159
$X = 1$	0,2966	0,1875	0,4841
Всего	0,6053	0,3947	1,0000

**Задача №2**

Завод производит лампы со средней продолжительностью работы 5710 ч. и стандартным отклонением 1580 ч. Известно, что продолжительность работы имеет нормальное распределение. Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 820 ламп. Найдите вероятность того, что:

- 2.1)  $X < 5673$  ч.
- 2.2)  $X > 5602$  ч.
- 2.3)  $5568$  ч.  $< X < 5800$  ч.
- 2.4)  $5747$  ч.  $< X < 5852$  ч.

**Задача №3**

В отделе технического контроля (ОТК) завода из задачи №2 проводится контроль выпущенной партии ламп. Тестируется нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 5710 ч. (стандарт)" против односторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп меньше 5710 ч. (брак)". Тест проводится следующим образом: Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 820 ламп. Если  $X > 5620$  ч., то нулевая гипотеза не отвергается.

- 3.1) Каков статистический размер этого теста?
- 3.2) Какова статистическая мощность рассмотренного теста, если нам известно, что, на самом деле, средняя продолжительность работы ламп не изменилась и равна 5710 ч., а стандартное отклонение составило 3847 ч.

**Задача №4**

В результате анализа получено, что средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 820 ламп, выпущенных заводом из задачи №2, составила 5774 ч.

На каких стандартных уровнях значимости (1%, 5% и 10%) отвергается (на каких - не отвергается) нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 5710 ч." против двухсторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп НЕ равна 5710 ч." (Стандартное отклонение такое же, как и в задаче №2.)

**Задача №5**

Проводится опрос 29184 случайно выбранных потенциальных избирателей. 19230 респондентов ответили, что будут голосовать за "нашего" кандидата, а остальные 9954 – за его соперника. Пусть  $R$  – доля всех избирателей, которые собираются отдать "голос" за "нашего" кандидата.

- 5.1) Используя результаты опроса, оцените величину  $R$  и её стандартное отклонение.
- 5.2) Постройте 90% доверительный интервал для оценки величины  $R$ .

**Задача №6**

В течение года ураган может нанести повреждения дому. Повреждения происходят случайным образом. Пусть  $U$  (в у.е.) – размер повреждений в данном году. Пусть в 21% случаев  $U = 7400$  у.е., в остальных случаях  $U = 0$ .

- 6.1) Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение для среднего выборочного  $\bar{U}$  по выборке из 10370 домов (дома выбираются независимо).
- 6.2) Какова вероятность того, что  $\bar{U}$  больше 1630 у.е.
- 6.3) Чему должно быть равно  $n$  – количество домов в выборке, если вероятность того, что среднее выборочное  $\bar{U}$  меньше 1638 у.е. составила 97,5%?

**Задача №7**

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 16,2% и стандартным отклонением 5,5%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 9,1% и стандартным отклонением 4,3%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,187.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 90% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

**Задача №8**

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	8,6	10,0	14,5	17,0	19,2	21,4	15,117
Y	10,9	9,0	12,4	20,1	19,1	21,9	15,567
X <sup>2</sup>	73,96	100,00	210,25	289,00	368,64	457,96	249,968
Y <sup>2</sup>	118,81	81,00	153,76	404,01	364,81	479,61	267,000
XY	93,74	90,00	179,80	341,70	366,72	468,66	256,770

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

**Задача №9**

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 61185(\pm 33992) + 6541(\pm 5663) X_1(i) + 24386(\pm 10743) X_2(i) + 1053(\pm 342) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Женщины без высшего образования 37 лет"?

9.3) Постройте 90% доверительный интервал для различия доходов "Женщины без высшего образования 37 лет" и "Женщины без высшего образования 47 лет".

**Задача №10**

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 8,23(\pm 2,881) + 0,385(\pm 0,748) \ln X_1(i) + 0,012(\pm 0,011) X_2(i) + 0,094(\pm 0,071) X_3(i) + 0,084(\pm 0,029) X_4(i) + 0,021(\pm 0,044) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,276; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 38% и количество спален увеличилось на 3. Постройте 95% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом испортить «прекрасный вид». Постройте 99% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,4841$	$\sigma(X) = 0,4997$	$E(Y   X = 0) = 0,4016$
$E(Y) = 0,3947$	$\sigma(Y) = 0,4888$	$E(Y   X = 1) = 0,3873$
$E(XY) = 0,1875$	$\text{cov}(X; Y) = -0,0036$	$E(X   Y = 0) = 0,4900$
	$\text{corr}(X; Y) = -0,0147$	$E(X   Y = 1) = 0,4750$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 55,176 часов.

2.1) 25%	2.2) 97,5%	2.3) 94,5%	2.4) 24,5%
----------	------------	------------	------------

**Задачи №3–4**

3.1) 5%	3.2) 25%	4) НЕ отвергаем на всех уровнях значимости.
---------	----------	---

**Задача №5**

$R = 0,65892$	$\sigma = 0,00278$	$[0,65436; 0,66348]$
---------------	--------------------	----------------------

**Задачи №6**

6.1) $E = 1554,00$ у.е.	$\sigma = 29,60$ у.е.	6.2) 0,5%	6.3) 4947 шт.
-------------------------	-----------------------	-----------	---------------

**Задача №7**

$W = 0,3526$	$R_{\text{опт}} = 11,603\%$	$\sigma_{\text{опт}} = 3,678\%$	$[5,57\%; 17,63\%]$
--------------	-----------------------------	---------------------------------	---------------------

**Задача №8**

$D(X) = 25,7332$	$\sigma(X) = 5,0728$	$\text{Cov}(X; Y) = 25,7324$
$D(Y) = 29,6022$	$\sigma(Y) = 5,4408$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,9323$
$\beta_1 = 1$	$\beta_0 = 0,45$	
$TSS = 148,011$	$ESS = 128,658$	$RSS = 19,353$
$R^2 = 0,8692$	$R^2_{\text{adj}} = 0,8366$	$F = 26,5918$

Модель ЗНАЧИМА на всех уровнях значимости.

**Задача №9**

9.1)	$t_0 = 1,8$ *	$t_1 = 1,16$ не знач.
	$t_2 = 2,27$ **	$t_3 = 3,08$ ***

9.2)  $Y = 100\,146$  руб.

9.3) $\Delta Y = 10\,530$	$\sigma = 3\,420$	$[4921,2; 16138,8]$
---------------------------	-------------------	---------------------

**Задачи №10**

10.1) $\Delta \text{Ln} Y = 0,16$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,252$	$[-0,3339; 0,6539]$
$Y_2/Y_1 = 1,1735$ (Увеличилась на 17,35%)		$[-28,39\%; 92,3\%]$
10.2) $\Delta \text{Ln} Y = 0,01$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,0767$	$[-0,1879; 0,2079]$
$Y_2/Y_1 = 1,0101$ (Увеличилась на 1,01%)		$[-17,13\%; 23,11\%]$



**Задача №1**

Дано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  (табл.). Найдите: математические ожидания  $E(X)$ ,  $E(Y)$  и  $E(XY)$ ; стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$ , корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ ; условные математические ожидания  $E(Y | X = 0)$ ;  $E(Y | X = 1)$ ;  $E(X | Y = 0)$ ;  $E(X | Y = 1)$ .

	$Y = 0$	$Y = 1$	Всего
$X = 0$	0,2995	0,1109	0,4104
$X = 1$	0,2261	0,3635	0,5896
Всего	0,5256	0,4744	1,0000

**Задача №2**

Завод производит лампы со средней продолжительностью работы 3840 ч. и стандартным отклонением 720 ч. Известно, что продолжительность работы имеет нормальное распределение. Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 250 ламп. Найдите вероятность того, что:

- 2.1)  $X < 3809$  ч.
- 2.2)  $X > 3871$  ч.
- 2.3)  $3765$  ч.  $< X < 3957$  ч.
- 2.4)  $3723$  ч.  $< X < 3809$  ч.

**Задача №3**

В отделе технического контроля (ОТК) завода из задачи №2 проводится контроль выпущенной партии ламп. Тестируется нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 3840 ч. (стандарт)" против односторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп меньше 3840 ч. (брак)". Тест проводится следующим образом: Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 250 ламп. Если  $X > 3723$  ч., то нулевая гипотеза не отвергается.

- 3.1) Каков статистический размер этого теста?
- 3.2) Какова статистическая мощность рассмотренного теста, если нам известно, что, на самом деле, средняя продолжительность работы ламп составила 3812 ч., а стандартное отклонение не изменилось и равно 720 ч.

**Задача №4**

В результате анализа получено, что средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 250 ламп, выпущенных заводом из задачи №2, составила 3922 ч. На каких стандартных уровнях значимости (1%, 5% и 10%) отвергается (на каких - не отвергается) нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 3840 ч." против двухсторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп НЕ равна 3840 ч." (Стандартное отклонение такое же, как и в задаче №2.)

**Задача №5**

Проводится опрос 25445 случайно выбранных потенциальных избирателей. 13015 респондентов ответили, что будут голосовать за "нашего" кандидата, а остальные 12430 – за его соперника. Пусть  $R$  – доля всех избирателей, которые собираются отдать "голос" за "нашего" кандидата.

- 5.1) Используя результаты опроса, оцените величину  $R$  и её стандартное отклонение.
- 5.2) Постройте 99% доверительный интервал для оценки величины  $R$ .

**Задача №6**

В течение года ураган может нанести повреждения дому. Повреждения происходят случайным образом. Пусть  $U$  (в у.е.) – размер повреждений в данном году. Пусть в 9% случаев  $U = 85700$  у.е., в остальных случаях  $U = 0$ .

- 6.1) Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение для среднего выборочного  $\bar{U}$  по выборке из 5190 домов (дома выбираются независимо).
- 6.2) Какова вероятность того, что  $\bar{U}$  больше 7046 у.е.
- 6.3) Чему должно быть равно  $n$  – количество домов в выборке, если вероятность того, что среднее выборочное  $\bar{U}$  меньше 6997 у.е. составила 0,5%?



**Задача №7**

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 18,9% и стандартным отклонением 8,6%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 9,1% и стандартным отклонением 3,7%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,157.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 95% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

**Задача №8**

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	3,7	7,7	8,8	10,6	19,6	25,4	12,633
Y	7,1	18,7	26,2	16,3	28,8	23,6	20,117
X <sup>2</sup>	13,69	59,29	77,44	112,36	384,16	645,16	215,350
Y <sup>2</sup>	50,41	349,69	686,44	265,69	829,44	556,96	456,438
XY	26,27	143,99	230,56	172,78	564,48	599,44	289,587

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

**Задача №9**

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 39485(\pm 21936) + 14602(\pm 8112) X_1(i) + 21061(\pm 6838) X_2(i) + 1165(\pm 1009) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Мужчины с высшим образованием 30 лет"?

9.3) Постройте 99% доверительный интервал для различия доходов "Мужчины с высшим образованием 30 лет" и "Мужчины с высшим образованием 25 лет".

**Задача №10**

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 9,228(\pm 5,038) + 0,456(\pm 0,111) \ln X_1(i) + 0,014(\pm 0,009) X_2(i) + 0,035(\pm 0,082) X_3(i) + 0,023(\pm 0,075) X_4(i) + 0,02(\pm 0,012) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,146; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 39% и количество спален уменьшилось на 2. Постройте 90% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом НЕ испортить «прекрасный вид». Постройте 99% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,5896$	$\sigma(X) = 0,4919$	$E(Y   X = 0) = 0,2702$
$E(Y) = 0,4744$	$\sigma(Y) = 0,4993$	$E(Y   X = 1) = 0,6165$
$E(XY) = 0,3635$	$\text{cov}(X; Y) = 0,0838$	$E(X   Y = 0) = 0,4302$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,3412$	$E(X   Y = 1) = 0,7662$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 45,537 часов.

2.1) 25%	2.2) 25%	2.3) 94,5%	2.4) 24,5%
----------	----------	------------	------------

**Задачи №3–4**

3.1) 0,5%	3.2) 2,5%	4) Отвергаем на 10%; НЕ отвергаем на 1% и 5% уровнях значимости.
-----------	-----------	--

**Задача №5**

$R = 0,51150$	$\sigma = 0,00313$	$[0,50342; 0,51958]$
---------------	--------------------	----------------------

**Задачи №6**

6.1) $E = 7713,00$ у.е.	$\sigma = 340,44$ у.е.	6.2) 97,5%	6.3) 7811 шт.
-------------------------	------------------------	------------	---------------

**Задача №7**

$W = 0,1120$	$R_{\text{опт}} = 10,198\%$	$\sigma_{\text{опт}} = 3,566\%$	$[3,21\%; 17,19\%]$
--------------	-----------------------------	---------------------------------	---------------------

**Задача №8**

$D(X) = 66,9088$	$\sigma(X) = 8,1798$	$\text{Cov}(X; Y) = 42,5387$
$D(Y) = 62,0932$	$\sigma(Y) = 7,8799$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,66$
$\beta_1 = 0,6358$	$\beta_0 = 12,0849$	
$\text{TSS} = 310,466$	$\text{ESS} = 135,2244$	$\text{RSS} = 175,2416$
$R^2 = 0,4356$	$R^2_{\text{adj}} = 0,2944$	$F = 3,0866$

Модель ЗНАЧИМА на 50% уровне значимости и НЕ Значима на 10%.

**Задача №9**

9.1)	$t_0 = 1,8^*$	$t_1 = 1,8^*$
	$t_2 = 3,08^{***}$	$t_3 = 1,15$ не знач.

9.2)	$Y = 110\,098$ руб.
------	---------------------

9.3) $\Delta Y = -5\,825$	$\sigma = 5\,045$	$[-18841,1; 7191,1]$
---------------------------	-------------------	----------------------

**Задачи №10**

10.1) $\Delta \text{Ln} Y = 0,1222$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,0383$	$[0,0594; 0,185]$
$Y_2/Y_1 = 1,13$ (Увеличилась на 13%)		$[6,12\%; 20,32\%]$
10.2) $\Delta \text{Ln} Y = 0,055$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,0829$	$[-0,1589; 0,2689]$
$Y_2/Y_1 = 1,0565$ (Увеличилась на 5,65%)		$[-14,69\%; 30,85\%]$



**Задача №1**

Дано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  (табл.). Найдите: математические ожидания  $E(X)$ ,  $E(Y)$  и  $E(XY)$ ; стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$ , корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ ; условные математические ожидания  $E(Y | X = 0)$ ;  $E(Y | X = 1)$ ;  $E(X | Y = 0)$ ;  $E(X | Y = 1)$ .

	$Y = 0$	$Y = 1$	Всего
$X = 0$	0,2620	0,2185	0,4805
$X = 1$	0,0885	0,4310	0,5195
Всего	0,3505	0,6495	1,0000

**Задача №2**

Завод производит лампы со средней продолжительностью работы 2060 ч. и стандартным отклонением 550 ч. Известно, что продолжительность работы имеет нормальное распределение. Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 1070 ламп. Найдите вероятность того, что:

- 2.1)  $X < 2049$  ч.
- 2.2)  $X > 2071$  ч.
- 2.3)  $2017$  ч.  $< X < 2027$  ч.
- 2.4)  $2049$  ч.  $< X < 2103$  ч.

**Задача №3**

В отделе технического контроля (ОТК) завода из задачи №2 проводится контроль выпущенной партии ламп. Тестируется нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 2060 ч. (стандарт)" против односторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп меньше 2060 ч. (брак)". Тест проводится следующим образом: Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 1070 ламп. Если  $X > 2032$  ч., то нулевая гипотеза не отвергается.

- 3.1) Каков статистический размер этого теста?
- 3.2) Какова статистическая мощность рассмотренного теста, если нам известно, что, на самом деле, средняя продолжительность работы ламп составила 1989 ч., а стандартное отклонение не изменилось и равно 550 ч.

**Задача №4**

В результате анализа получено, что средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 1070 ламп, выпущенных заводом из задачи №2, составила 2041 ч.

На каких стандартных уровнях значимости (1%, 5% и 10%) отвергается (на каких - не отвергается) нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 2060 ч." против двухсторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп НЕ равна 2060 ч." (Стандартное отклонение такое же, как и в задаче №2.)

**Задача №5**

Проводится опрос 48254 случайно выбранных потенциальных избирателей. 34969 респондентов ответили, что будут голосовать за "нашего" кандидата, а остальные 13285 – за его соперника. Пусть  $R$  – доля всех избирателей, которые собираются отдать "голос" за "нашего" кандидата.

- 5.1) Используя результаты опроса, оцените величину  $R$  и её стандартное отклонение.
- 5.2) Постройте 95% доверительный интервал для оценки величины  $R$ .

**Задача №6**

В течение года ураган может нанести повреждения дому. Повреждения происходят случайным образом. Пусть  $U$  (в у.е.) – размер повреждений в данном году. Пусть в 21% случаев  $U = 30800$  у.е., в остальных случаях  $U = 0$ .

- 6.1) Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение для среднего выборочного  $\bar{U}$  по выборке из 8450 домов (дома выбираются независимо).
- 6.2) Какова вероятность того, что  $\bar{U}$  больше 6116 у.е.
- 6.3) Чему должно быть равно  $n$  – количество домов в выборке, если вероятность того, что среднее выборочное  $\bar{U}$  меньше 6068 у.е. составила 2,5%?

**Задача №7**

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 15,2% и стандартным отклонением 6%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 5,8% и стандартным отклонением 4,8%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,173.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 90% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

**Задача №8**

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	3,8	8,3	17,0	20,1	26,5	35,1	18,467
Y	6,4	13,0	17,9	40,2	43,7	43,9	27,517
X <sup>2</sup>	14,44	68,89	289,00	404,01	702,25	1232,01	451,767
Y <sup>2</sup>	40,96	169,00	320,41	1616,04	1909,69	1927,21	997,218
XY	24,32	107,90	304,30	808,02	1158,05	1540,89	657,247

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

**Задача №9**

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 77851(\pm 25276) + 6500(\pm 5628) X_1(i) + 18627(\pm 10348) X_2(i) + 858(\pm 279) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Женщины без высшего образования 39 лет"?

9.3) Постройте 90% доверительный интервал для различия доходов "Женщины без высшего образования 39 лет" и "Мужчины без высшего образования 39 лет".

**Задача №10**

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 8,051(\pm 6,932) + 0,66(\pm 0,126) \ln X_1(i) + 0,005(\pm 0,009) X_2(i) + 0,095(\pm 0,095) X_3(i) + 0,072(\pm 0,019) X_4(i) + 0,006(\pm 0,055) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,809; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 32% и количество спален увеличилось на 2. Постройте 95% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом НЕ испортить «прекрасный вид». Постройте 99% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,5195$	$\sigma(X) = 0,4996$	$E(Y   X = 0) = 0,4547$
$E(Y) = 0,6495$	$\sigma(Y) = 0,4771$	$E(Y   X = 1) = 0,8296$
$E(XY) = 0,4310$	$\text{cov}(X; Y) = 0,0936$	$E(X   Y = 0) = 0,2525$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,3927$	$E(X   Y = 1) = 0,6636$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 16,814 часов.

2.1) 25%	2.2) 25%	2.3) 2%	2.4) 74,5%
----------	----------	---------	------------

**Задачи №3–4**

3.1) 5%	3.2) 99,5%	4) НЕ отвергаем на всех уровнях значимости.
---------	------------	---

**Задача №5**

$R = 0,72469$	$\sigma = 0,00203$	$[0,72071; 0,72867]$
---------------	--------------------	----------------------

**Задачи №6**

6.1) $E = 6468,00$ у.е.	$\sigma = 136,47$ у.е.	6.2) 99,5%	6.3) 3779 шт.
-------------------------	------------------------	------------	---------------

**Задача №7**

$W = 0,3680$	$R_{\text{опт}} = 9,259\%$	$\sigma_{\text{опт}} = 4,049\%$	$[2,62\%; 15,90\%]$
--------------	----------------------------	---------------------------------	---------------------

**Задача №8**

$D(X) = 132,8843$	$\sigma(X) = 11,5275$	$\text{Cov}(X; Y) = 178,9087$
$D(Y) = 288,0393$	$\sigma(Y) = 16,9717$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,9145$
$\beta_1 = 1,3463$	$\beta_0 = 2,6549$	
$\text{TSS} = 1\,440,1965$	$\text{ESS} = 1\,204,3681$	$\text{RSS} = 235,8284$
$R^2 = 0,8363$	$R^2_{\text{adj}} = 0,7953$	$F = 20,4279$

Модель ЗНАЧИМА на 5% уровне значимости и НЕ Значима на 1%.

**Задача №9**

9.1)	$t_0 = 3,08$ ***	$t_1 = 1,15$ не знач.
	$t_2 = 1,8$ *	$t_3 = 3,08$ ***
9.2)	$Y = 111\,313$ руб.	
9.3) $\Delta Y = 6\,500$	$\sigma = 5\,628$	$[-2729,9; 15729,9]$

**Задачи №10**

10.1) $\Delta \ln Y = 0,1932$	$\sigma(\Delta \ln Y) = 0,0507$	$[0,0938; 0,2926]$
$Y_2/Y_1 = 1,2131$ (Увеличилась на 21,31%)		$[9,83\%; 33,99\%]$
10.2) $\Delta \ln Y = 0,101$	$\sigma(\Delta \ln Y) = 0,1098$	$[-0,1823; 0,3843]$
$Y_2/Y_1 = 1,1063$ (Увеличилась на 10,63%)		$[-16,66\%; 46,86\%]$

**Задача №1**

Дано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  (табл.). Найдите: математические ожидания  $E(X)$ ,  $E(Y)$  и  $E(XY)$ ; стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$ , корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ ; условные математические ожидания  $E(Y | X = 0)$ ;  $E(Y | X = 1)$ ;  $E(X | Y = 0)$ ;  $E(X | Y = 1)$ .

	$Y = 0$	$Y = 1$	Всего
$X = 0$	0,0689	0,2930	0,3619
$X = 1$	0,1016	0,5365	0,6381
Всего	0,1705	0,8295	1,0000

**Задача №2**

Завод производит лампы со средней продолжительностью работы 4940 ч. и стандартным отклонением 1650 ч. Известно, что продолжительность работы имеет нормальное распределение. Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 300 ламп. Найдите вероятность того, что:

- 2.1)  $X < 5096$  ч.    2.2)  $X > 4876$  ч.  
2.3)  $4694$  ч.  $< X < 5004$  ч.                                  2.4)  $4784$  ч.  $< X < 4876$  ч.

**Задача №3**

В отделе технического контроля (ОТК) завода из задачи №2 проводится контроль выпущенной партии ламп. Тестируется нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 4940 ч. (стандарт)" против односторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп меньше 4940 ч. (брак)". Тест проводится следующим образом: Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 300 ламп. Если  $X > 4784$  ч., то нулевая гипотеза не отвергается.

- 3.1) Каков статистический размер этого теста?  
3.2) Какова статистическая мощность рассмотренного теста, если нам известно, что, на самом деле, средняя продолжительность работы ламп не изменилась и равна 4940 ч., а стандартное отклонение составило 4033 ч.

**Задача №4**

В результате анализа получено, что средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 300 ламп, выпущенных заводом из задачи №2, составила 5233 ч.

На каких стандартных уровнях значимости (1%, 5% и 10%) отвергается (на каких - не отвергается) нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 4940 ч." против двухсторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп не равна 4940 ч." (Стандартное отклонение такое же, как и в задаче №2.)

**Задача №5**

Проводится опрос 14448 случайно выбранных потенциальных избирателей. 4147 респондентов ответили, что будут голосовать за "нашего" кандидата, а остальные 10301 – за его соперника. Пусть  $R$  – доля всех избирателей, которые собираются отдать "голос" за "нашего" кандидата.

- 5.1) Используя результаты опроса, оцените величину  $R$  и её стандартное отклонение.  
5.2) Постройте 90% доверительный интервал для оценки величины  $R$ .

**Задача №6**

В течение года ураган может нанести повреждения дому. Повреждения происходят случайным образом. Пусть  $U$  (в у.е.) – размер повреждений в данном году. Пусть в 27% случаев  $U = 9800$  у.е., в остальных случаях  $U = 0$ .

- 6.1) Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение для среднего выборочного  $\bar{U}$  по выборке из 4330 домов (дома выбираются независимо).  
6.2) Какова вероятность того, что  $\bar{U}$  больше 2776 у.е.  
6.3) Чему должно быть равно  $n$  – количество домов в выборке, если вероятность того, что среднее выборочное  $\bar{U}$  меньше 2597 у.е. составила 25%?

**Задача №7**

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 12,2% и стандартным отклонением 7,9%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 3,5% и стандартным отклонением 5,4%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,332.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 99% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

**Задача №8**

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	9,0	14,7	17,7	24,0	27,5	37,6	21,750
Y	5,3	13,9	28,0	56,9	52,4	70,8	37,883
X <sup>2</sup>	81,00	216,09	313,29	576,00	756,25	1413,76	559,398
Y <sup>2</sup>	28,09	193,21	784,00	3237,61	2745,76	5012,64	2000,218
XY	47,70	204,33	495,60	1365,60	1441,00	2662,08	1036,052

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

**Задача №9**

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 60969(\pm 52787) + 10450(\pm 3393) X_1(i) + 15541(\pm 13455) X_2(i) + 1344(\pm 747) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Мужчины без высшего образования 25 лет"?

9.3) Постройте 95% доверительный интервал для различия доходов "Мужчины без высшего образования 25 лет" и "Мужчины с высшим образованием 25 лет".

**Задача №10**

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 4,998(\pm 2,379) + 0,322(\pm 0,447) \ln X_1(i) + 0,013(\pm 0,006) X_2(i) + 0,03(\pm 0,052) X_3(i) + 0,08(\pm 0,087) X_4(i) + 0,01(\pm 0,044) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,309; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 25% и количество спален уменьшилось на 2. Постройте 90% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом НЕ испортить «прекрасный вид». Постройте 95% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,6381$	$\sigma(X) = 0,4806$	$E(Y   X = 0) = 0,8096$
$E(Y) = 0,8295$	$\sigma(Y) = 0,3761$	$E(Y   X = 1) = 0,8408$
$E(XY) = 0,5365$	$\text{cov}(X; Y) = 0,0072$	$E(X   Y = 0) = 0,5959$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,0398$	$E(X   Y = 1) = 0,6468$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 95,263 часов.

2.1) 95%	2.2) 75%	2.3) 74,5%	2.4) 20%
----------	----------	------------	----------

**Задачи №3–4**

3.1) 5%	3.2) 25%	4) Отвергаем на всех уровнях значимости.
---------	----------	--

**Задача №5**

$R = 0,28703$	$\sigma = 0,00376$	$[0,28086; 0,29320]$
---------------	--------------------	----------------------

**Задачи №6**

6.1) $E = 2646,00$ у.е.	$\sigma = 66,12$ у.е.	6.2) 2,5%	6.3) 3540 шт.
-------------------------	-----------------------	-----------	---------------

**Задача №7**

$W = 0,2371$	$R_{\text{опт}} = 5,563\%$	$\sigma_{\text{опт}} = 5,060\%$	$[-7,49\%; 18,62\%]$
--------------	----------------------------	---------------------------------	----------------------

**Задача №8**

$D(X) = 103,6026$	$\sigma(X) = 10,1785$	$\text{Cov}(X; Y) = 254,5161$
$D(Y) = 678,1156$	$\sigma(Y) = 26,0407$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,9602$
$\beta_1 = 2,4567$	$\beta_0 = -15,5502$	
$\text{TSS} = 3\,390,578$	$\text{ESS} = 3\,126,2944$	$\text{RSS} = 264,2836$
$R^2 = 0,9221$	$R^2_{\text{adj}} = 0,9026$	$F = 47,3173$

Модель ЗНАЧИМА на всех уровнях значимости.

**Задача №9**

9.1)	$t_0 = 1,16$ не знач.	$t_1 = 3,08$ ***
	$t_2 = 1,16$ не знач.	$t_3 = 1,8$ *

9.2)	$Y = 105\,019$ руб.
------	---------------------

9.3) $\Delta Y = 15\,541$	$\sigma = 13\,455$	$[-10830,8; 41912,8]$
---------------------------	--------------------	-----------------------

**Задачи №10**

10.1) $\Delta \ln Y = 0,0459$	$\sigma(\Delta \ln Y) = 0,0967$	$[-0,1127; 0,2045]$
$Y_2/Y_1 = 1,047$ (Увеличилась на 4,7%)		$[-10,66\%; 22,69\%]$
10.2) $\Delta \ln Y = 0,04$	$\sigma(\Delta \ln Y) = 0,0681$	$[-0,0935; 0,1735]$
$Y_2/Y_1 = 1,0408$ (Увеличилась на 4,08%)		$[-8,93\%; 18,95\%]$





**Задача №1**

Дано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  (табл.). Найдите: математические ожидания  $E(X)$ ,  $E(Y)$  и  $E(XY)$ ; стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$ , корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ ; условные математические ожидания  $E(Y | X = 0)$ ;  $E(Y | X = 1)$ ;  $E(X | Y = 0)$ ;  $E(X | Y = 1)$ .

	$Y = 0$	$Y = 1$	Всего
$X = 0$	<b>0,1078</b>	<b>0,0872</b>	0,1950
$X = 1$	<b>0,1786</b>	<b>0,6264</b>	0,8050
Всего	0,2864	0,7136	1,0000

**Задача №2**

Завод производит лампы со средней продолжительностью работы 10190 ч. и стандартным отклонением 1720 ч. Известно, что продолжительность работы имеет нормальное распределение. Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 530 ламп. Найдите вероятность того, что:

- 2.1)  $X < 10313$  ч.
- 2.2)  $X > 10383$  ч.
- 2.3)  $10140$  ч.  $< X < 10336$  ч.
- 2.4)  $9997$  ч.  $< X < 10044$  ч.

**Задача №3**

В отделе технического контроля (ОТК) завода из задачи №2 проводится контроль выпущенной партии ламп. Тестируется нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 10190 ч. (стандарт)" против односторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп меньше 10190 ч. (брак)". Тест проводится следующим образом: Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 530 ламп. Если  $X > 10044$  ч., то нулевая гипотеза не отвергается.

- 3.1) Каков статистический размер этого теста?
- 3.2) Какова статистическая мощность рассмотренного теста, если нам известно, что, на самом деле, средняя продолжительность работы ламп составила 9898 ч., а стандартное отклонение не изменилось и равно 1720 ч.

**Задача №4**

В результате анализа получено, что средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 530 ламп, выпущенных заводом из задачи №2, составила 10360 ч.

На каких стандартных уровнях значимости (1%, 5% и 10%) отвергается (на каких - не отвергается) нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 10190 ч." против двухсторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп НЕ равна 10190 ч." (Стандартное отклонение такое же, как и в задаче №2.)

**Задача №5**

Проводится опрос 47759 случайно выбранных потенциальных избирателей. 27317 респондентов ответили, что будут голосовать за "нашего" кандидата, а остальные 20442 – за его соперника. Пусть  $R$  – доля всех избирателей, которые собираются отдать "голос" за "нашего" кандидата.

- 5.1) Используя результаты опроса, оцените величину  $R$  и её стандартное отклонение.
- 5.2) Постройте 99% доверительный интервал для оценки величины  $R$ .

**Задача №6**

В течение года ураган может нанести повреждения дому. Повреждения происходят случайным образом. Пусть  $U$  (в у.е.) – размер повреждений в данном году. Пусть в 5% случаев  $U = 59900$  у.е., в остальных случаях  $U = 0$ .

- 6.1) Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение для среднего выборочного  $\bar{U}$  по выборке из 8270 домов (дома выбираются независимо).
- 6.2) Какова вероятность того, что  $\bar{U}$  больше 3230 у.е.
- 6.3) Чему должно быть равно  $n$  – количество домов в выборке, если вероятность того, что среднее выборочное  $\bar{U}$  меньше 3339 у.е. составила 99,5%?

**Задача №7**

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 13,8% и стандартным отклонением 8,9%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 4% и стандартным отклонением 3%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,163.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 95% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

**Задача №8**

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	3,9	11,6	17,0	19,9	27,3	36,6	19,383
Y	3,8	12,5	33,6	47,8	41,3	40,8	29,967
X <sup>2</sup>	15,21	134,56	289,00	396,01	745,29	1339,56	486,605
Y <sup>2</sup>	14,44	156,25	1128,96	2284,84	1705,69	1664,64	1159,137
XY	14,82	145,00	571,20	951,22	1127,49	1493,28	717,168

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

**Задача №9**

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 42127(\pm 36474) + 9097(\pm 4007) X_1(i) + 24828(\pm 10937) X_2(i) + 1279(\pm 415) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Мужчины с высшим образованием 50 лет"?

9.3) Постройте 99% доверительный интервал для различия доходов "Мужчины с высшим образованием 50 лет" и "Мужчины без высшего образования 50 лет".

**Задача №10**

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 6,023(\pm 2,554) + 0,777(\pm 0,278) \ln X_1(i) + 0,011(\pm 0,006) X_2(i) + 0,091(\pm 0,073) X_3(i) + 0,044(\pm 0,086) X_4(i) + 0,011(\pm 0,083) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,178; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 23% и количество спален уменьшилось на 2. Постройте 90% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом испортить «прекрасный вид». Постройте 99% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,8050$	$\sigma(X) = 0,3962$	$E(Y   X = 0) = 0,4472$
$E(Y) = 0,7136$	$\sigma(Y) = 0,4521$	$E(Y   X = 1) = 0,7781$
$E(XY) = 0,6264$	$\text{cov}(X; Y) = 0,0520$	$E(X   Y = 0) = 0,6236$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,2903$	$E(X   Y = 1) = 0,8778$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 74,712 часов.

2.1) 95%	2.2) 0,5%	2.3) 72,5%	2.4) 2%
----------	-----------	------------	---------

**Задачи №3–4**

3.1) 2,5%	3.2) 97,5%	4) Отвергаем на 5% и 10%; НЕ отвергаем на 1% уровне значимости.
-----------	------------	---

**Задача №5**

$R = 0,57198$	$\sigma = 0,00226$	$[0,56615; 0,57781]$
---------------	--------------------	----------------------

**Задачи №6**

6.1) $E = 2995,00$ у.е.	$\sigma = 143,56$ у.е.	6.2) 5%	6.3) 9587 шт.
-------------------------	------------------------	---------	---------------

**Задача №7**

$W = 0,0585$	$R_{\text{опт}} = 4,573\%$	$\sigma_{\text{опт}} = 2,954\%$	$[-1,22\%; 10,36\%]$
--------------	----------------------------	---------------------------------	----------------------

**Задача №8**

$D(X) = 133,0852$	$\sigma(X) = 11,5363$	$\text{Cov}(X; Y) = 163,5812$
$D(Y) = 313,3391$	$\sigma(Y) = 17,7014$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,801$
$\beta_1 = 1,2291$	$\beta_0 = 6,1434$	
$\text{TSS} = 1\,566,6955$	$\text{ESS} = 1\,005,3262$	$\text{RSS} = 561,3693$
$R^2 = 0,6417$	$R^2_{\text{adj}} = 0,5521$	$F = 7,1634$

Модель ЗНАЧИМА на 10% уровне значимости и НЕ Значима на 5%.

**Задача №9**

9.1)	$t_0 = 1,15$ не знач.	$t_1 = 2,27$ **
	$t_2 = 2,27$ **	$t_3 = 3,08$ ***

9.2)	$Y = 140\,002$ руб.
------	---------------------

9.3) $\Delta Y = -24\,828$	$\sigma = 10\,937$	$[-53045,5; 3389,5]$
----------------------------	--------------------	----------------------

**Задачи №10**

10.1) $\Delta \text{Ln} Y = 0,1389$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,0567$	$[0,0459; 0,2319]$
-------------------------------------	---------------------------------------	--------------------

$Y_2/Y_1 = 1,149$ (Увеличилась на 14,9%)	$[4,7\%; 26,1\%]$
--	-------------------

10.2) $\Delta \text{Ln} Y = 0,047$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,1128$	$[-0,244; 0,338]$
------------------------------------	---------------------------------------	-------------------

$Y_2/Y_1 = 1,0481$ (Увеличилась на 4,81%)	$[-21,65\%; 40,21\%]$
---	-----------------------



## Тестовый Вариант № КР1-10 (2023/24)

### Задача №1

Дано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  (табл.). Найдите: математические ожидания  $E(X)$ ,  $E(Y)$  и  $E(XY)$ ; стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$ , корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ ; условные математические ожидания  $E(Y | X = 0)$ ;  $E(Y | X = 1)$ ;  $E(X | Y = 0)$ ;  $E(X | Y = 1)$ .

	$Y = 0$	$Y = 1$	Всего
$X = 0$	0,1618	0,2017	0,3635
$X = 1$	0,1244	0,5121	0,6365
Всего	0,2862	0,7138	1,0000

### Задача №2

Завод производит лампы со средней продолжительностью работы 1380 ч. и стандартным отклонением 1340 ч. Известно, что продолжительность работы имеет нормальное распределение. Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 590 ламп. Найдите вероятность того, что:

- 2.1)  $X < 1290$  ч.
- 2.2)  $X > 1470$  ч.
- 2.3)  $1272$  ч.  $< X < 1522$  ч.
- 2.4)  $1238$  ч.  $< X < 1290$  ч.

### Задача №3

В отделе технического контроля (ОТК) завода из задачи №2 проводится контроль выпущенной партии ламп. Тестируется нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 1380 ч. (стандарт)" против односторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп меньше 1380 ч. (брак)". Тест проводится следующим образом: Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 590 ламп. Если  $X > 1238$  ч., то нулевая гипотеза не отвергается.

- 3.1) Каков статистический размер этого теста?
- 3.2) Какова статистическая мощность рассмотренного теста, если нам известно, что, на самом деле, средняя продолжительность работы ламп составила 1148 ч., а стандартное отклонение не изменилось и равно 1340 ч.

### Задача №4

В результате анализа получено, что средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 590 ламп, выпущенных заводом из задачи №2, составила 1505 ч.

На каких стандартных уровнях значимости (1%, 5% и 10%) отвергается (на каких - не отвергается) нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 1380 ч." против двухсторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп НЕ равна 1380 ч." (Стандартное отклонение такое же, как и в задаче №2.)

### Задача №5

Проводится опрос 44531 случайно выбранных потенциальных избирателей. 11282 респондентов ответили, что будут голосовать за "нашего" кандидата, а остальные 33249 – за его соперника. Пусть  $R$  – доля всех избирателей, которые собираются отдать "голос" за "нашего" кандидата.

- 5.1) Используя результаты опроса, оцените величину  $R$  и её стандартное отклонение.
- 5.2) Постройте 95% доверительный интервал для оценки величины  $R$ .

### Задача №6

В течение года ураган может нанести повреждения дому. Повреждения происходят случайным образом. Пусть  $U$  (в у.е.) – размер повреждений в данном году. Пусть в 12% случаев  $U = 15400$  у.е., в остальных случаях  $U = 0$ .

- 6.1) Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение для среднего выборочного  $\bar{U}$  по выборке из 5830 домов (дома выбираются независимо).
- 6.2) Какова вероятность того, что  $\bar{U}$  больше 1976 у.е.
- 6.3) Чему должно быть равно  $n$  – количество домов в выборке, если вероятность того, что среднее выборочное  $\bar{U}$  меньше 1897 у.е. составила 75%?

**Задача №7**

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 13,9% и стандартным отклонением 6,1%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 3,8% и стандартным отклонением 3,1%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,172.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 99% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

**Задача №8**

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	8,9	11,2	18,7	25,2	35,0	42,6	23,600
Y	2,6	4,0	4,0	2,5	3,7	4,5	3,550
X <sup>2</sup>	79,21	125,44	349,69	635,04	1225,00	1814,76	704,857
Y <sup>2</sup>	6,76	16,00	16,00	6,25	13,69	20,25	13,158
XY	23,14	44,80	74,80	63,00	129,50	191,70	87,823

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

**Задача №9**

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 35547(\pm 19748) + 13551(\pm 4400) X_1(i) + 22829(\pm 7412) X_2(i) + 1098(\pm 484) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Мужчины без высшего образования 53 лет"?

9.3) Постройте 95% доверительный интервал для различия доходов "Мужчины без высшего образования 53 лет" и "Мужчины без высшего образования 37 лет".

**Задача №10**

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 7,799(\pm 4,921) + 0,618(\pm 0,752) \ln X_1(i) + 0,011(\pm 0,01) X_2(i) + 0,097(\pm 0,058) X_3(i) + 0,046(\pm 0,066) X_4(i) + 0,012(\pm 0,078) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,631; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 19% и количество спален уменьшилось на 1. Постройте 90% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом НЕ испортить «прекрасный вид». Постройте 95% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,6365$	$\sigma(X) = 0,4810$	$E(Y   X = 0) = 0,5549$
$E(Y) = 0,7138$	$\sigma(Y) = 0,4520$	$E(Y   X = 1) = 0,8046$
$E(XY) = 0,5121$	$\text{cov}(X; Y) = 0,0578$	$E(X   Y = 0) = 0,4347$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,2659$	$E(X   Y = 1) = 0,7174$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 55,167 часов.

2.1) 5%                      2.2) 5%                      2.3) 97%                      2.4) 4,5%

**Задачи №3–4**

3.1) 0,5%    3.2) 95%    4) Отвергаем на 5% и 10%; НЕ отвергаем на 1% уровне значимости.

**Задача №5**R = 0,25335                       $\sigma = 0,00206$                       [0,24931; 0,25739]**Задачи №6**6.1) E = 1848,00 у.е.     $\sigma = 65,54$  у.е.                      6.2) 2,5%                      6.3) 4683 шт.**Задача №7**W = 0,1577                      R<sub>опт</sub> = 5,393%                       $\sigma_{\text{опт}} = 2,934\%$                       [-2,18%; 12,96%]**Задача №8**

$D(X) = 177,4764$	$\sigma(X) = 13,322$	$\text{Cov}(X; Y) = 4,8516$
$D(Y) = 0,6666$	$\sigma(Y) = 0,8165$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,446$
$\beta_1 = 0,0273$	$\beta_0 = 2,9057$	
TSS = 3,333	ESS = 0,6631	RSS = 2,6699
R <sup>2</sup> = 0,1989	R <sup>2</sup> <sub>adj</sub> = -0,0013	F = 0,9934

Модель ЗНАЧИМА на 50% уровне значимости и НЕ Значима на 10%.

**Задача №9**9.1)                       $t_0 = 1,8$  \*                       $t_1 = 3,08$  \*\*\*  
                                  $t_2 = 3,08$  \*\*\*                       $t_3 = 2,27$  \*\*

9.2)                      Y = 107 292 руб.

9.3)  $\Delta Y = -17 568$                        $\sigma = 7 744$                       [-32746,2; -2389,8]**Задачи №10**10.1)  $\Delta \ln Y = 0,0965$                        $\sigma(\Delta \ln Y) = 0,1247$                       [-0,108; 0,301]  
 $Y_2/Y_1 = 1,1013$  (Увеличилась на 10,13%)                      [-10,24%; 35,12%]10.2)  $\Delta \ln Y = 0,109$                        $\sigma(\Delta \ln Y) = 0,0972$                       [-0,0815; 0,2995]  
 $Y_2/Y_1 = 1,1152$  (Увеличилась на 11,52%)                      [-7,83%; 34,92%]



**Задача №1**

Дано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  (табл.). Найдите: математические ожидания  $E(X)$ ,  $E(Y)$  и  $E(XY)$ ; стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$ , корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ ; условные математические ожидания  $E(Y | X = 0)$ ;  $E(Y | X = 1)$ ;  $E(X | Y = 0)$ ;  $E(X | Y = 1)$ .

	$Y = 0$	$Y = 1$	Всего
$X = 0$	<b>0,0210</b>	<b>0,1440</b>	0,1650
$X = 1$	<b>0,0827</b>	<b>0,7523</b>	0,8350
Всего	0,1037	0,8963	1,0000

**Задача №2**

Завод производит лампы со средней продолжительностью работы 8320 ч. и стандартным отклонением 980 ч. Известно, что продолжительность работы имеет нормальное распределение. Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 1030 ламп. Найдите вероятность того, что:

- 2.1)  $X < 8241$  ч.
- 2.2)  $X > 8340$  ч.
- 2.3)  $8260$  ч.  $< X < 8300$  ч.
- 2.4)  $8241$  ч.  $< X < 8370$  ч.

**Задача №3**

В отделе технического контроля (ОТК) завода из задачи №2 проводится контроль выпущенной партии ламп. Тестируется нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 8320 ч. (стандарт)" против односторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп меньше 8320 ч. (брак)". Тест проводится следующим образом: Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 1030 ламп. Если  $X > 8270$  ч., то нулевая гипотеза не отвергается.

- 3.1) Каков статистический размер этого теста?
- 3.2) Какова статистическая мощность рассмотренного теста, если нам известно, что, на самом деле, средняя продолжительность работы ламп не изменилась и равна 8320 ч., а стандартное отклонение составило 2395 ч.

**Задача №4**

В результате анализа получено, что средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 1030 ламп, выпущенных заводом из задачи №2, составила 8355 ч.

На каких стандартных уровнях значимости (1%, 5% и 10%) отвергается (на каких - не отвергается) нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 8320 ч." против двухсторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп НЕ равна 8320 ч." (Стандартное отклонение такое же, как и в задаче №2.)

**Задача №5**

Проводится опрос 39437 случайно выбранных потенциальных избирателей. 12972 респондентов ответили, что будут голосовать за "нашего" кандидата, а остальные 26465 – за его соперника. Пусть  $R$  – доля всех избирателей, которые собираются отдать "голос" за "нашего" кандидата.

- 5.1) Используя результаты опроса, оцените величину  $R$  и её стандартное отклонение.
- 5.2) Постройте 99% доверительный интервал для оценки величины  $R$ .

**Задача №6**

В течение года ураган может нанести повреждения дому. Повреждения происходят случайным образом. Пусть  $U$  (в у.е.) – размер повреждений в данном году. Пусть в 31% случаев  $U = 69300$  у.е., в остальных случаях  $U = 0$ .

- 6.1) Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение для среднего выборочного  $\bar{U}$  по выборке из 7490 домов (дома выбираются независимо).
- 6.2) Какова вероятность того, что  $\bar{U}$  больше 21731 у.е.
- 6.3) Чему должно быть равно  $n$  – количество домов в выборке, если вероятность того, что среднее выборочное  $\bar{U}$  меньше 22036 у.е. составила 95%?

**Задача №7**

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 13% и стандартным отклонением 6,4%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 8,6% и стандартным отклонением 3,2%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,220.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 90% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

**Задача №8**

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	7,5	11,9	20,3	21,7	26,4	31,0	19,800
Y	6,5	4,3	9,2	17,2	12,4	16,0	10,933
X <sup>2</sup>	56,25	141,61	412,09	470,89	696,96	961,00	456,467
Y <sup>2</sup>	42,25	18,49	84,64	295,84	153,76	256,00	141,830
XY	48,75	51,17	186,76	373,24	327,36	496,00	247,213

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

**Задача №9**

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 54503(\pm 24010) + 8099(\pm 7012) X_1(i) + 24063(\pm 20834) X_2(i) + 1493(\pm 485) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Женщины без высшего образования 43 лет"?

9.3) Постройте 99% доверительный интервал для различия доходов "Женщины без высшего образования 43 лет" и "Мужчины без высшего образования 43 лет".

**Задача №10**

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 8,49(\pm 3,048) + 0,551(\pm 0,134) \ln X_1(i) + 0,015(\pm 0,015) X_2(i) + 0,108(\pm 0,073) X_3(i) + 0,093(\pm 0,052) X_4(i) + 0,014(\pm 0,067) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,915; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 19% и количество спален уменьшилось на 2. Постройте 90% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом НЕ испортить «прекрасный вид». Постройте 99% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.



**Задача №1**

$E(X) = 0,8350$	$\sigma(X) = 0,3712$	$E(Y   X = 0) = 0,8727$
$E(Y) = 0,8963$	$\sigma(Y) = 0,3049$	$E(Y   X = 1) = 0,9010$
$E(XY) = 0,7523$	$\text{cov}(X; Y) = 0,0039$	$E(X   Y = 0) = 0,7975$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,0345$	$E(X   Y = 1) = 0,8393$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 30,536 часов.

2.1) 0,5%	2.2) 25%	2.3) 22,5%	2.4) 94,5%
-----------	----------	------------	------------

**Задачи №3–4**

3.1) 5%	3.2) 25%	4) НЕ отвергаем на всех уровнях значимости.
---------	----------	---

**Задача №5**

$R = 0,32893$	$\sigma = 0,00237$	$[0,32282; 0,33504]$
---------------	--------------------	----------------------

**Задачи №6**

6.1) $E = 21483,00$ у.е.	$\sigma = 370,34$ у.е.	6.2) 25%	6.3) 9035 шт.
--------------------------	------------------------	----------	---------------

**Задача №7**

$W = 0,1359$	$R_{\text{опт}} = 9,198\%$	$\sigma_{\text{опт}} = 3,076\%$	$[4,15\%; 14,24\%]$
--------------	----------------------------	---------------------------------	---------------------

**Задача №8**

$D(X) = 77,3124$	$\sigma(X) = 8,7927$	$\text{Cov}(X; Y) = 36,8875$
$D(Y) = 26,7594$	$\sigma(Y) = 5,1729$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,811$
$\beta_1 = 0,4771$	$\beta_0 = 1,4864$	
$\text{TSS} = 133,797$	$\text{ESS} = 87,9993$	$\text{RSS} = 45,7977$
$R^2 = 0,6577$	$R^2_{\text{adj}} = 0,5721$	$F = 7,6859$

Модель ЗНАЧИМА на 10% уровне значимости и НЕ Значима на 5%.

**Задача №9**

9.1)	$t_0 = 2,27$ **	$t_1 = 1,16$ не знач.
	$t_2 = 1,15$ не знач.	$t_3 = 3,08$ ***

9.2)	$Y = 118\,702$ руб.
------	---------------------

9.3) $\Delta Y = 8\,099$	$\sigma = 7\,012$	$[-9992,0; 26190,0]$
--------------------------	-------------------	----------------------

**Задачи №10**

10.1) $\Delta \text{Ln} Y = 0,0658$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,0128$	$[0,0448; 0,0868]$
-------------------------------------	---------------------------------------	--------------------

$Y_2/Y_1 = 1,068$ (Увеличилась на 6,8%)	$[4,58\%; 9,07\%]$
---	--------------------

10.2) $\Delta \text{Ln} Y = 0,122$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,0991$	$[-0,1337; 0,3777]$
------------------------------------	---------------------------------------	---------------------

$Y_2/Y_1 = 1,1298$ (Увеличилась на 12,98%)	$[-12,51\%; 45,89\%]$
--	-----------------------

**Задача №1**

Дано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  (табл.). Найдите: математические ожидания  $E(X)$ ,  $E(Y)$  и  $E(XY)$ ; стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$ , корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ ; условные математические ожидания  $E(Y | X = 0)$ ;  $E(Y | X = 1)$ ;  $E(X | Y = 0)$ ;  $E(X | Y = 1)$ .

	$Y = 0$	$Y = 1$	Всего
$X = 0$	0,1446	0,1679	0,3125
$X = 1$	0,1531	0,5344	0,6875
Всего	0,2977	0,7023	1,0000

**Задача №2**

Завод производит лампы со средней продолжительностью работы 9110 ч. и стандартным отклонением 1290 ч. Известно, что продолжительность работы имеет нормальное распределение. Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 860 ламп. Найдите вероятность того, что:

- 2.1)  $X < 9196$  ч.
- 2.2)  $X > 9139$  ч.
- 2.3)  $9024$  ч.  $< X < 9182$  ч.
- 2.4)  $8997$  ч.  $< X < 9081$  ч.

**Задача №3**

В отделе технического контроля (ОТК) завода из задачи №2 проводится контроль выпущенной партии ламп. Тестируется нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 9110 ч. (стандарт)" против односторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп меньше 9110 ч. (брак)". Тест проводится следующим образом: Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 860 ламп. Если  $X > 9081$  ч., то нулевая гипотеза не отвергается.

- 3.1) Каков статистический размер этого теста?
- 3.2) Какова статистическая мощность рассмотренного теста, если нам известно, что, на самом деле, средняя продолжительность работы ламп составила 9009 ч., а стандартное отклонение не изменилось и равно 1290 ч.

**Задача №4**

В результате анализа получено, что средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 860 ламп, выпущенных заводом из задачи №2, составила 9031 ч.

На каких стандартных уровнях значимости (1%, 5% и 10%) отвергается (на каких - не отвергается) нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 9110 ч." против двухсторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп НЕ равна 9110 ч." (Стандартное отклонение такое же, как и в задаче №2.)

**Задача №5**

Проводится опрос 21186 случайно выбранных потенциальных избирателей. 10278 респондентов ответили, что будут голосовать за "нашего" кандидата, а остальные 10908 – за его соперника. Пусть  $R$  – доля всех избирателей, которые собираются отдать "голос" за "нашего" кандидата.

- 5.1) Используя результаты опроса, оцените величину  $R$  и её стандартное отклонение.
- 5.2) Постройте 95% доверительный интервал для оценки величины  $R$ .

**Задача №6**

В течение года ураган может нанести повреждения дому. Повреждения происходят случайным образом. Пусть  $U$  (в у.е.) – размер повреждений в данном году. Пусть в 44% случаев  $U = 18800$  у.е., в остальных случаях  $U = 0$ .

- 6.1) Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение для среднего выборочного  $\bar{U}$  по выборке из 7570 домов (дома выбираются независимо).
- 6.2) Какова вероятность того, что  $\bar{U}$  больше 8448 у.е.
- 6.3) Чему должно быть равно  $n$  – количество домов в выборке, если вероятность того, что среднее выборочное  $\bar{U}$  меньше 8092 у.е. составила 2,5%?

## Тестовый Вариант № КР1-12 (2023/24)

(продолжение)

### Задача №7

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 8,6% и стандартным отклонением 5,7%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 6,2% и стандартным отклонением 4,3%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,485.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 99% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

### Задача №8

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	5,2	6,5	12,5	20,0	23,1	33,8	16,850
Y	11,1	13,3	36,0	76,3	89,0	124,8	58,417
X <sup>2</sup>	27,04	42,25	156,25	400,00	533,61	1142,44	383,598
Y <sup>2</sup>	123,21	176,89	1296,00	5821,69	7921,00	15575,04	5152,305
XY	57,72	86,45	450,00	1526,00	2055,90	4218,24	1399,052

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

### Задача №9

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 41685(\pm 13534) + 6634(\pm 3686) X_1(i) + 17515(\pm 5687) X_2(i) + 1167(\pm 1010) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Женщины без высшего образования 32 лет"?

9.3) Постройте 95% доверительный интервал для различия доходов "Женщины без высшего образования 32 лет" и "Мужчины без высшего образования 32 лет".

### Задача №10

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 6,048(\pm 3,508) + 0,429(\pm 0,791) \ln X_1(i) + 0,009(\pm 0,01) X_2(i) + 0,053(\pm 0,102) X_3(i) + 0,044(\pm 0,111) X_4(i) + 0,011(\pm 0,056) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,321; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 30% и количество спален увеличилось на 3. Постройте 95% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом испортить «прекрасный вид». Постройте 99% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,6875$	$\sigma(X) = 0,4635$	$E(Y   X = 0) = 0,5373$
$E(Y) = 0,7023$	$\sigma(Y) = 0,4572$	$E(Y   X = 1) = 0,7773$
$E(XY) = 0,5344$	$\text{cov}(X; Y) = 0,0516$	$E(X   Y = 0) = 0,5143$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,2435$	$E(X   Y = 1) = 0,7609$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 43,989 часов.

2.1) 97,5%	2.2) 25%	2.3) 92,5%	2.4) 24,5%
------------	----------	------------	------------

**Задачи №3–4**

3.1) 25%	3.2) 95%	4) Отвергаем на 10%; НЕ отвергаем на 1% и 5% уровнях значимости.
----------	----------	--

**Задача №5**

$R = 0,48513$	$\sigma = 0,00343$	$[0,47841; 0,49185]$
---------------	--------------------	----------------------

**Задачи №6**

6.1) $E = 8272,00$ у.е.	$\sigma = 107,26$ у.е.	6.2) 5%	6.3) 10326 шт.
-------------------------	------------------------	---------	----------------

**Задача №7**

$W = 0,2427$	$R_{\text{опт}} = 6,782\%$	$\sigma_{\text{опт}} = 4,109\%$	$[-3,82\%; 17,38\%]$
--------------	----------------------------	---------------------------------	----------------------

**Задача №8**

$D(X) = 119,6106$	$\sigma(X) = 10,9367$	$\text{Cov}(X; Y) = 497,6707$
$D(Y) = 2\,087,7109$	$\sigma(Y) = 45,6915$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,9959$
$\beta_1 = 4,1608$	$\beta_0 = -11,6925$	
$\text{TSS} = 10\,438,5545$	$\text{ESS} = 10\,353,4355$	$\text{RSS} = 85,119$
$R^2 = 0,9918$	$R^2_{\text{adj}} = 0,9898$	$F = 486,5393$

Модель ЗНАЧИМА на всех уровнях значимости.

**Задача №9**

9.1)	$t_0 = 3,08$ ***	$t_1 = 1,8$ *
	$t_2 = 3,08$ ***	$t_3 = 1,16$ не знач.

9.2)	$Y = 79\,029$ руб.
------	--------------------

9.3) $\Delta Y = 6\,634$	$\sigma = 3\,686$	$[-590,6; 13858,6]$
--------------------------	-------------------	---------------------

**Задачи №10**

10.1) $\Delta \ln Y = 0,1396$	$\sigma(\Delta \ln Y) = 0,219$	$[-0,2896; 0,5688]$
$Y_2/Y_1 = 1,1498$ (Увеличилась на 14,98%)		$[-25,14\%; 76,61\%]$
10.2) $\Delta \ln Y = 0,009$	$\sigma(\Delta \ln Y) = 0,1507$	$[-0,3798; 0,3978]$
$Y_2/Y_1 = 1,009$ (Увеличилась на 0,9%)		$[-31,6\%; 48,85\%]$



**Задача №1**

Дано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  (табл.). Найдите: математические ожидания  $E(X)$ ,  $E(Y)$  и  $E(XY)$ ; стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$ , корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ ; условные математические ожидания  $E(Y | X = 0)$ ;  $E(Y | X = 1)$ ;  $E(X | Y = 0)$ ;  $E(X | Y = 1)$ .

	$Y = 0$	$Y = 1$	Всего
$X = 0$	0,1770	0,2338	0,4108
$X = 1$	0,1543	0,4349	0,5892
Всего	0,3313	0,6687	1,0000

**Задача №2**

Завод производит лампы со средней продолжительностью работы 10700 ч. и стандартным отклонением 2160 ч. Известно, что продолжительность работы имеет нормальное распределение. Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 780 ламп. Найдите вероятность того, что:

- 2.1)  $X < 10548$  ч.
- 2.2)  $X > 10500$  ч.
- 2.3)  $10648$  ч.  $< X < 10900$  ч.
- 2.4)  $10827$  ч.  $< X < 10852$  ч.

**Задача №3**

В отделе технического контроля (ОТК) завода из задачи №2 проводится контроль выпущенной партии ламп. Тестируется нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 10700 ч. (стандарт)" против односторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп меньше 10700 ч. (брак)". Тест проводится следующим образом: Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 780 ламп. Если  $X > 10573$  ч., то нулевая гипотеза не отвергается.

- 3.1) Каков статистический размер этого теста?
- 3.2) Какова статистическая мощность рассмотренного теста, если нам известно, что, на самом деле, средняя продолжительность работы ламп составила 10373 ч., а стандартное отклонение не изменилось и равно 2160 ч.

**Задача №4**

В результате анализа получено, что средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 780 ламп, выпущенных заводом из задачи №2, составила 10611 ч.

На каких стандартных уровнях значимости (1%, 5% и 10%) отвергается (на каких - не отвергается) нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 10700 ч." против двухсторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп НЕ равна 10700 ч." (Стандартное отклонение такое же, как и в задаче №2.)

**Задача №5**

Проводится опрос 47737 случайно выбранных потенциальных избирателей. 24323 респондентов ответили, что будут голосовать за "нашего" кандидата, а остальные 23414 – за его соперника. Пусть  $R$  – доля всех избирателей, которые собираются отдать "голос" за "нашего" кандидата.

- 5.1) Используя результаты опроса, оцените величину  $R$  и её стандартное отклонение.
- 5.2) Постройте 90% доверительный интервал для оценки величины  $R$ .

**Задача №6**

В течение года ураган может нанести повреждения дому. Повреждения происходят случайным образом. Пусть  $U$  (в у.е.) – размер повреждений в данном году. Пусть в 33% случаев  $U = 27500$  у.е., в остальных случаях  $U = 0$ .

- 6.1) Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение для среднего выборочного  $\bar{U}$  по выборке из 5660 домов (дома выбираются независимо).
- 6.2) Какова вероятность того, что  $\bar{U}$  больше 8960 у.е.
- 6.3) Чему должно быть равно  $n$  – количество домов в выборке, если вероятность того, что среднее выборочное  $\bar{U}$  меньше 9395 у.е. составила 99,5%?

## Тестовый Вариант № КР1-13 (2023/24)

(продолжение)

### Задача №7

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 8,3% и стандартным отклонением 4,2%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 4% и стандартным отклонением 2,7%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,260.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 95% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

### Задача №8

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	4,9	14,8	20,6	26,1	30,3	33,2	21,650
Y	6,4	12,6	21,8	45,4	77,2	43,8	34,533
X <sup>2</sup>	24,01	219,04	424,36	681,21	918,09	1102,24	561,492
Y <sup>2</sup>	40,96	158,76	475,24	2061,16	5959,84	1918,44	1769,067
XY	31,36	186,48	449,08	1184,94	2339,16	1454,16	940,863

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

### Задача №9

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 43324(\pm 37510) + 12844(\pm 4170) X1(i) + 23091(\pm 38485) X2(i) + 792(\pm 440) X3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Женщины без высшего образования 48 лет"?

9.3) Постройте 99% доверительный интервал для различия доходов "Женщины без высшего образования 48 лет" и "Женщины без высшего образования 35 лет".

### Задача №10

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 6,882(\pm 4,391) + 0,284(\pm 0,568) \ln X1(i) + 0,008(\pm 0,009) X2(i) + 0,058(\pm 0,096) X3(i) + 0,037(\pm 0,118) X4(i) + 0,022(\pm 0,076) X3(i) X4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X1$  – площадь дома;  $X2$  – количество спален;  $X3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,596; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 8% и количество спален уменьшилось на 2. Постройте 90% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом испортить «прекрасный вид». Постройте 99% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,5892$	$\sigma(X) = 0,4920$	$E(Y   X = 0) = 0,5691$
$E(Y) = 0,6687$	$\sigma(Y) = 0,4707$	$E(Y   X = 1) = 0,7381$
$E(XY) = 0,4349$	$\text{cov}(X; Y) = 0,0409$	$E(X   Y = 0) = 0,4657$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,1766$	$E(X   Y = 1) = 0,6504$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 77,340 часов.

2.1) 2,5%	2.2) 99,5%	2.3) 74,5%	2.4) 2,5%
-----------	------------	------------	-----------

**Задачи №3–4**

3.1) 5%	3.2) 99,5%	4) НЕ отвергаем на всех уровнях значимости.
---------	------------	---

**Задача №5**

$R = 0,50952$	$\sigma = 0,00229$	$[0,50576; 0,51328]$
---------------	--------------------	----------------------

**Задачи №6**

6.1) $E = 9075,00$ у.е.	$\sigma = 171,88$ у.е.	6.2) 75%	6.3) 10870 шт.
-------------------------	------------------------	----------	----------------

**Задача №7**

$W = 0,2281$	$R_{\text{опт}} = 4,981\%$	$\sigma_{\text{опт}} = 2,510\%$	$[0,06\%; 9,90\%]$
--------------	----------------------------	---------------------------------	--------------------

**Задача №8**

$D(X) = 111,3234$	$\sigma(X) = 10,551$	$\text{Cov}(X; Y) = 231,8683$
$D(Y) = 691,8467$	$\sigma(Y) = 26,303$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,8355$
$\beta_1 = 2,0828$	$\beta_0 = -10,5596$	
$\text{TSS} = 3\,459,2335$	$\text{ESS} = 2\,414,7173$	$\text{RSS} = 1\,044,5162$
$R^2 = 0,698$	$R^2_{\text{adj}} = 0,6226$	$F = 9,2472$

Модель ЗНАЧИМА на 5% уровне значимости и НЕ Значима на 1%.

**Задача №9**

9.1)	$t_0 = 1,15$ не знач.	$t_1 = 3,08$ ***
	$t_2 = 0,6$ не знач.	$t_3 = 1,8$ *

9.2)	$Y = 81\,340$ руб.
------	--------------------

9.3) $\Delta Y = -10\,296$	$\sigma = 5\,720$	$[-25053,6; 4461,6]$
----------------------------	-------------------	----------------------

**Задачи №10**

10.1) $\Delta \ln Y = 0,0059$	$\sigma(\Delta \ln Y) = 0,036$	$[-0,0531; 0,0649]$
-------------------------------	--------------------------------	---------------------

$Y_2/Y_1 = 1,0059$ (Увеличилась на 0,59%)	$[-5,17\%; 6,71\%]$
---	---------------------

10.2) $\Delta \ln Y = 0,021$	$\sigma(\Delta \ln Y) = 0,1521$	$[-0,3714; 0,4134]$
------------------------------	---------------------------------	---------------------

$Y_2/Y_1 = 1,0212$ (Увеличилась на 2,12%)	$[-31,02\%; 51,19\%]$
---	-----------------------

**Задача №1**

Дано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  (табл.). Найдите: математические ожидания  $E(X)$ ,  $E(Y)$  и  $E(XY)$ ; стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$ , корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ ; условные математические ожидания  $E(Y | X = 0)$ ;  $E(Y | X = 1)$ ;  $E(X | Y = 0)$ ;  $E(X | Y = 1)$ .

	$Y = 0$	$Y = 1$	Всего
$X = 0$	0,0365	0,2329	0,2694
$X = 1$	0,0216	0,7090	0,7306
Всего	0,0581	0,9419	1,0000

**Задача №2**

Завод производит лампы со средней продолжительностью работы 5170 ч. и стандартным отклонением 240 ч. Известно, что продолжительность работы имеет нормальное распределение. Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 420 ламп. Найдите вероятность того, что:

- 2.1)  $X < 5178$  ч.
- 2.2)  $X > 5200$  ч.
- 2.3)  $5147$  ч.  $< X < 5151$  ч.
- 2.4)  $5140$  ч.  $< X < 5193$  ч.

**Задача №3**

В отделе технического контроля (ОТК) завода из задачи №2 проводится контроль выпущенной партии ламп. Тестируется нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 5170 ч. (стандарт)" против односторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп меньше 5170 ч. (брак)". Тест проводится следующим образом: Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 420 ламп. Если  $X > 5140$  ч., то нулевая гипотеза не отвергается.

- 3.1) Каков статистический размер этого теста?
- 3.2) Какова статистическая мощность рассмотренного теста, если нам известно, что, на самом деле, средняя продолжительность работы ламп составила 5121 ч., а стандартное отклонение не изменилось и равно 240 ч.

**Задача №4**

В результате анализа получено, что средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 420 ламп, выпущенных заводом из задачи №2, составила 5197 ч.

На каких стандартных уровнях значимости (1%, 5% и 10%) отвергается (на каких - не отвергается) нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 5170 ч." против двухсторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп НЕ равна 5170 ч." (Стандартное отклонение такое же, как и в задаче №2.)

**Задача №5**

Проводится опрос 41477 случайно выбранных потенциальных избирателей. 18566 респондентов ответили, что будут голосовать за "нашего" кандидата, а остальные 22911 – за его соперника. Пусть  $R$  – доля всех избирателей, которые собираются отдать "голос" за "нашего" кандидата.

- 5.1) Используя результаты опроса, оцените величину  $R$  и её стандартное отклонение.
- 5.2) Постройте 95% доверительный интервал для оценки величины  $R$ .

**Задача №6**

В течение года ураган может нанести повреждения дому. Повреждения происходят случайным образом. Пусть  $U$  (в у.е.) – размер повреждений в данном году. Пусть в 39% случаев  $U = 25000$  у.е., в остальных случаях  $U = 0$ .

- 6.1) Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение для среднего выборочного  $\bar{U}$  по выборке из 8600 домов (дома выбираются независимо).
- 6.2) Какова вероятность того, что  $\bar{U}$  больше 9411 у.е.
- 6.3) Чему должно быть равно  $n$  – количество домов в выборке, если вероятность того, что среднее выборочное  $\bar{U}$  меньше 9486 у.е. составила 5%?



## Тестовый Вариант № КР1-14 (2023/24)

(продолжение)

### Задача №7

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 10% и стандартным отклонением 4,3%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 3,1% и стандартным отклонением 2,9%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,255.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 90% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

### Задача №8

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	2,2	5,7	14,8	20,6	27,5	29,6	16,733
Y	9,2	13,0	11,4	15,1	17,9	26,0	15,433
X <sup>2</sup>	4,84	32,49	219,04	424,36	756,25	876,16	385,523
Y <sup>2</sup>	84,64	169,00	129,96	228,01	320,41	676,00	268,003
XY	20,24	74,10	168,72	311,06	492,25	769,60	305,995

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

### Задача №9

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 49042(\pm 42461) + 14101(\pm 7834) X1(i) + 20323(\pm 33872) X2(i) + 771(\pm 340) X3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Мужчины с высшим образованием 37 лет"?

9.3) Постройте 95% доверительный интервал для различия доходов "Мужчины с высшим образованием 37 лет" и "Мужчины с высшим образованием 32 лет".

### Задача №10

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 7,705(\pm 3,198) + 0,693(\pm 0,284) \ln X1(i) + 0,012(\pm 0,009) X2(i) + 0,021(\pm 0,062) X3(i) + 0,042(\pm 0,018) X4(i) + 0,022(\pm 0,067) X3(i) X4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X1$  – площадь дома;  $X2$  – количество спален;  $X3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,153; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 4% и количество спален увеличилось на 2. Постройте 90% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом испортить «прекрасный вид». Постройте 99% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,7306$	$\sigma(X) = 0,4436$	$E(Y   X = 0) = 0,8645$
$E(Y) = 0,9419$	$\sigma(Y) = 0,2339$	$E(Y   X = 1) = 0,9704$
$E(XY) = 0,7090$	$\text{cov}(X; Y) = 0,0208$	$E(X   Y = 0) = 0,3718$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,2005$	$E(X   Y = 1) = 0,7527$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 11,711 часов.

2.1) 75%	2.2) 0,5%	2.3) 2,5%	2.4) 97%
----------	-----------	-----------	----------

**Задачи №3–4**

3.1) 0,5%	3.2) 95%	4) Отвергаем на 5% и 10%; НЕ отвергаем на 1% уровне значимости.
-----------	----------	---

**Задача №5**

$R = 0,44762$	$\sigma = 0,00244$	$[0,44284; 0,45240]$
---------------	--------------------	----------------------

**Задачи №6**

6.1) $E = 9750,00$ у.е.	$\sigma = 131,49$ у.е.	6.2) 99,5%	6.3) 5738 шт.
-------------------------	------------------------	------------	---------------

**Задача №7**

$W = 0,2546$	$R_{\text{опт}} = 4,857\%$	$\sigma_{\text{опт}} = 2,660\%$	$[0,49\%; 9,22\%]$
--------------	----------------------------	---------------------------------	--------------------

**Задача №8**

$D(X) = 126,6357$	$\sigma(X) = 11,2533$	$\text{Cov}(X; Y) = 57,3055$
$D(Y) = 35,7906$	$\sigma(Y) = 5,9825$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,8512$
$\beta_1 = 0,4525$	$\beta_0 = 7,8613$	
$\text{TSS} = 178,953$	$\text{ESS} = 129,6601$	$\text{RSS} = 49,2929$
$R^2 = 0,7245$	$R^2_{\text{adj}} = 0,6557$	$F = 10,5216$

Модель ЗНАЧИМА на 5% уровне значимости и НЕ Значима на 1%.

**Задача №9**

9.1)	$t_0 = 1,15$ не знач.	$t_1 = 1,8$ *
	$t_2 = 0,6$ не знач.	$t_3 = 2,27$ **
9.2)	$Y = 111\,993$ руб.	
9.3) $\Delta Y = -3\,855$	$\sigma = 1\,700$	$[-7187,0; -523,0]$

**Задачи №10**

10.1) $\Delta \ln Y = 0,0512$	$\sigma(\Delta \ln Y) = 0,0226$	$[0,0141; 0,0883]$
$Y_2/Y_1 = 1,0525$ (Увеличилась на 5,25%)		$[1,42\%; 9,23\%]$
10.2) $\Delta \ln Y = -0,021$	$\sigma(\Delta \ln Y) = 0,0646$	$[-0,1877; 0,1457]$
$Y_2/Y_1 = 0,9792$ (Уменьшилась на 2,08%)		$[-17,11\%; 15,68\%]$



**Задача №7**

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 13,1% и стандартным отклонением 5,6%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 5% и стандартным отклонением 3,3%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,306.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 95% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

**Задача №8**

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	2,5	8,5	11,0	20,3	24,8	35,7	17,133
Y	4,7	11,6	8,6	18,2	16,9	17,8	12,967
X <sup>2</sup>	6,25	72,25	121,00	412,09	615,04	1274,49	416,853
Y <sup>2</sup>	22,09	134,56	73,96	331,24	285,61	316,84	194,050
XY	11,75	98,60	94,60	369,46	419,12	635,46	271,498

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

**Задача №9**

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 54579(\pm 30322) + 10233(\pm 5685) X1(i) + 24933(\pm 13852) X2(i) + 766(\pm 663) X3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Женщины без высшего образования 53 лет"?

9.3) Постройте 90% доверительный интервал для различия доходов "Женщины без высшего образования 53 лет" и "Мужчины без высшего образования 53 лет".

**Задача №10**

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 5,977(\pm 4,447) + 0,117(\pm 0,526) \ln X1(i) + 0,011(\pm 0,005) X2(i) + 0,096(\pm 0,074) X3(i) + 0,115(\pm 0,115) X4(i) + 0,008(\pm 0,037) X3(i) X4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X1$  – площадь дома;  $X2$  – количество спален;  $X3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,829; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 14% и количество спален увеличилось на 2. Постройте 90% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом НЕ испортить «прекрасный вид». Постройте 99% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,4644$	$\sigma(X) = 0,4987$	$E(Y   X = 0) = 0,5734$
$E(Y) = 0,4880$	$\sigma(Y) = 0,4999$	$E(Y   X = 1) = 0,3895$
$E(XY) = 0,1809$	$\text{cov}(X; Y) = -0,0457$	$E(X   Y = 0) = 0,5537$
	$\text{corr}(X; Y) = -0,1833$	$E(X   Y = 1) = 0,3707$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 31,786 часов.

2.1) 95%	2.2) 99,5%	2.3) 72,5%	2.4) 24,5%
----------	------------	------------	------------

**Задачи №3–4**

3.1) 5%	3.2) 25%	4) Отверяем на 10%; НЕ отвергаем на 1% и 5% уровнях значимости.
---------	----------	---

**Задача №5**

$R = 0,72142$	$\sigma = 0,00476$	$[0,71361; 0,72923]$
---------------	--------------------	----------------------

**Задачи №6**

6.1) $E = 25884,00$ у.е.	$\sigma = 688,86$ у.е.	6.2) 25%	6.3) 6789 шт.
--------------------------	------------------------	----------	---------------

**Задача №7**

$W = 0,1692$	$R_{\text{опт}} = 6,371\%$	$\sigma_{\text{опт}} = 3,163\%$	$[0,17\%; 12,57\%]$
--------------	----------------------------	---------------------------------	---------------------

**Задача №8**

$D(X) = 147,976$	$\sigma(X) = 12,1645$	$\text{Cov}(X; Y) = 59,2013$
$D(Y) = 31,0883$	$\sigma(Y) = 5,5757$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,8728$
$\beta_1 = 0,4001$	$\beta_0 = 6,1121$	
$\text{TSS} = 155,4415$	$\text{ESS} = 118,4244$	$\text{RSS} = 37,0171$
$R^2 = 0,7619$	$R^2_{\text{adj}} = 0,7023$	$F = 12,7967$

Модель ЗНАЧИМА на 5% уровне значимости и НЕ Значима на 1%.

**Задача №9**

9.1)	$t_0 = 1,8^*$	$t_1 = 1,8^*$
	$t_2 = 1,8^*$	$t_3 = 1,16$ не знач.

9.2)	$Y = 95\,177$ руб.
------	--------------------

9.3) $\Delta Y = 10\,233$	$\sigma = 5\,685$	$[909,6; 19556,4]$
---------------------------	-------------------	--------------------

**Задачи №10**

10.1) $\Delta \text{Ln} Y = 0,0373$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,0774$	$[-0,0896; 0,1642]$
-------------------------------------	---------------------------------------	---------------------

$Y_2/Y_1 = 1,038$ (Увеличилась на 3,8%)		$[-8,57\%; 17,84\%]$
---	--	----------------------

10.2) $\Delta \text{Ln} Y = 0,104$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,0827$	$[-0,1094; 0,3174]$
------------------------------------	---------------------------------------	---------------------

$Y_2/Y_1 = 1,1096$ (Увеличилась на 10,96%)		$[-10,36\%; 37,36\%]$
--	--	-----------------------



## Тестовый Вариант № КР1-16 (2023/24)

(продолжение)

### Задача №7

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 13,6% и стандартным отклонением 5,1%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 4,6% и стандартным отклонением 3,3%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,312.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 99% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

### Задача №8

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	2,2	8,2	10,7	19,2	21,2	31,8	15,550
Y	5,3	9,3	17,4	23,3	26,7	35,1	19,517
X <sup>2</sup>	4,84	67,24	114,49	368,64	449,44	1011,24	335,982
Y <sup>2</sup>	28,09	86,49	302,76	542,89	712,89	1232,01	484,188
XY	11,66	76,26	186,18	447,36	566,04	1116,18	400,613

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

### Задача №9

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 64875(\pm 56169) + 10601(\pm 17668) X_1(i) + 16831(\pm 9351) X_2(i) + 522(\pm 452) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Мужчины без высшего образования 34 лет"?

9.3) Постройте 95% доверительный интервал для различия доходов "Мужчины без высшего образования 34 лет" и "Мужчины без высшего образования 52 лет".

### Задача №10

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 6,213(\pm 2,933) + 0,649(\pm 0,524) \ln X_1(i) + 0,013(\pm 0,012) X_2(i) + 0,084(\pm 0,08) X_3(i) + 0,013(\pm 0,096) X_4(i) + 0,015(\pm 0,04) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,801; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 10% и количество спален уменьшилось на 1. Постройте 95% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом НЕ испортить «прекрасный вид». Постройте 99% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,5255$	$\sigma(X) = 0,4993$	$E(Y   X = 0) = 0,4658$
$E(Y) = 0,5984$	$\sigma(Y) = 0,4902$	$E(Y   X = 1) = 0,7182$
$E(XY) = 0,3774$	$\text{cov}(X; Y) = 0,0629$	$E(X   Y = 0) = 0,3688$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,2570$	$E(X   Y = 1) = 0,6307$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 72,000 часов.

2.1) 95%	2.2) 0,5%	2.3) 24,5%	2.4) 70%
----------	-----------	------------	----------

**Задачи №3–4**

3.1) 2,5%	3.2) 5%	4) Отвергаем на 10%; НЕ отвергаем на 1% и 5% уровнях значимости.
-----------	---------	--

**Задача №5**

$R = 0,32843$	$\sigma = 0,00442$	$[0,31977; 0,33709]$
---------------	--------------------	----------------------

**Задачи №6**

6.1) $E = 13312,00$ у.е.	$\sigma = 441,17$ у.е.	6.2) 95%	6.3) 7436 шт.
--------------------------	------------------------	----------	---------------

**Задача №7**

$W = 0,2136$	$R_{\text{опт}} = 6,522\%$	$\sigma_{\text{опт}} = 3,112\%$	$[-1,51\%; 14,55\%]$
--------------	----------------------------	---------------------------------	----------------------

**Задача №8**

$D(X) = 113,0154$	$\sigma(X) = 10,6309$	$\text{Cov}(X; Y) = 116,5484$
$D(Y) = 123,9297$	$\sigma(Y) = 11,1324$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,9848$
$\beta_1 = 1,0313$	$\beta_0 = 3,4803$	
$\text{TSS} = 619,6485$	$\text{ESS} = 600,9592$	$\text{RSS} = 18,6893$
$R^2 = 0,9698$	$R^2_{\text{adj}} = 0,9623$	$F = 128,621$

Модель ЗНАЧИМА на всех уровнях значимости.

**Задача №9**

9.1)	$t_0 = 1,15$ не знач.	$t_1 = 0,6$ не знач.
	$t_2 = 1,8$ *	$t_3 = 1,15$ не знач.

9.2)	$Y = 93\,224$ руб.
------	--------------------

9.3) $\Delta Y = 9\,396$	$\sigma = 8\,136$	$[-6550,6; 25342,6]$
--------------------------	-------------------	----------------------

**Задачи №10**

10.1) $\Delta \text{Ln} Y = 0,0489$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,041$	$[-0,0315; 0,1293]$
-------------------------------------	--------------------------------------	---------------------

$Y_2/Y_1 = 1,0501$ (Увеличилась на 5,01%)	$[-3,1\%; 13,8\%]$
---	--------------------

10.2) $\Delta \text{Ln} Y = 0,099$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,0894$	$[-0,1317; 0,3297]$
------------------------------------	---------------------------------------	---------------------

$Y_2/Y_1 = 1,1041$ (Увеличилась на 10,41%)	$[-12,34\%; 39,06\%]$
--	-----------------------





**Задача №1**

Дано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  (табл.). Найдите: математические ожидания  $E(X)$ ,  $E(Y)$  и  $E(XY)$ ; стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$ , корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ ; условные математические ожидания  $E(Y | X = 0)$ ;  $E(Y | X = 1)$ ;  $E(X | Y = 0)$ ;  $E(X | Y = 1)$ .

	$Y = 0$	$Y = 1$	Всего
$X = 0$	0,0709	0,2768	0,3477
$X = 1$	0,2177	0,4346	0,6523
Всего	0,2886	0,7114	1,0000

**Задача №2**

Завод производит лампы со средней продолжительностью работы 3610 ч. и стандартным отклонением 280 ч. Известно, что продолжительность работы имеет нормальное распределение. Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 260 ламп. Найдите вероятность того, что:

- 2.1)  $X < 3565$  ч.
- 2.2)  $X > 3655$  ч.
- 2.3)  $3576$  ч.  $< X < 3638$  ч.
- 2.4)  $3565$  ч.  $< X < 3582$  ч.

**Задача №3**

В отделе технического контроля (ОТК) завода из задачи №2 проводится контроль выпущенной партии ламп. Тестируется нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 3610 ч. (стандарт)" против односторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп меньше 3610 ч. (брак)". Тест проводится следующим образом: Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 260 ламп. Если  $X > 3582$  ч., то нулевая гипотеза не отвергается.

- 3.1) Каков статистический размер этого теста?
- 3.2) Какова статистическая мощность рассмотренного теста, если нам известно, что, на самом деле, средняя продолжительность работы ламп не изменилась и равна 3610 ч., а стандартное отклонение составило 674 ч.

**Задача №4**

В результате анализа получено, что средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 260 ламп, выпущенных заводом из задачи №2, составила 3579 ч.

На каких стандартных уровнях значимости (1%, 5% и 10%) отвергается (на каких - не отвергается) нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 3610 ч." против двухсторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп НЕ равна 3610 ч." (Стандартное отклонение такое же, как и в задаче №2.)

**Задача №5**

Проводится опрос 52845 случайно выбранных потенциальных избирателей. 21726 респондентов ответили, что будут голосовать за "нашего" кандидата, а остальные 31119 – за его соперника. Пусть  $R$  – доля всех избирателей, которые собираются отдать "голос" за "нашего" кандидата.

- 5.1) Используя результаты опроса, оцените величину  $R$  и её стандартное отклонение.
- 5.2) Постройте 90% доверительный интервал для оценки величины  $R$ .

**Задача №6**

В течение года ураган может нанести повреждения дому. Повреждения происходят случайным образом. Пусть  $U$  (в у.е.) – размер повреждений в данном году. Пусть в 20% случаев  $U = 2700$  у.е., в остальных случаях  $U = 0$ .

- 6.1) Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение для среднего выборочного  $\bar{U}$  по выборке из 4310 домов (дома выбираются независимо).
- 6.2) Какова вероятность того, что  $\bar{U}$  больше 529 у.е.
- 6.3) Чему должно быть равно  $n$  – количество домов в выборке, если вероятность того, что среднее выборочное  $\bar{U}$  меньше 557 у.е. составила 95%?

## Тестовый Вариант № КР1-17 (2023/24)

(продолжение)

### Задача №7

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 12,9% и стандартным отклонением 8,4%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 7,8% и стандартным отклонением 5,6%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,290.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 95% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

### Задача №8

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	0,5	5,6	10,4	15,5	23,7	26,2	13,650
Y	2,8	9,1	23,9	26,2	17,6	15,3	15,817
X <sup>2</sup>	0,25	31,36	108,16	240,25	561,69	686,44	271,358
Y <sup>2</sup>	7,84	82,81	571,21	686,44	309,76	234,09	315,358
XY	1,40	50,96	248,56	406,10	417,12	400,86	254,167

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

### Задача №9

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 48779(\pm 15837) + 6671(\pm 2939) X_1(i) + 22657(\pm 7356) X_2(i) + 677(\pm 298) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Женщины с высшим образованием 24 лет"?

9.3) Постройте 90% доверительный интервал для различия доходов "Женщины с высшим образованием 24 лет" и "Женщины без высшего образования 24 лет".

### Задача №10

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 5,921(\pm 4,571) + 0,741(\pm 0,124) \ln X_1(i) + 0,007(\pm 0,006) X_2(i) + 0,092(\pm 0,082) X_3(i) + 0,073(\pm 0,113) X_4(i) + 0,013(\pm 0,09) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,619; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 13% и количество спален уменьшилось на 3. Постройте 95% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом НЕ испортить «прекрасный вид». Постройте 90% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,6523$	$\sigma(X) = 0,4762$	$E(Y   X = 0) = 0,7961$
$E(Y) = 0,7114$	$\sigma(Y) = 0,4531$	$E(Y   X = 1) = 0,6663$
$E(XY) = 0,4346$	$\text{cov}(X; Y) = -0,0294$	$E(X   Y = 0) = 0,7543$
	$\text{corr}(X; Y) = -0,1363$	$E(X   Y = 1) = 0,6109$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 17,365 часов.

2.1) 0,5%	2.2) 0,5%	2.3) 92,5%	2.4) 4,5%
-----------	-----------	------------	-----------

**Задачи №3–4**

3.1) 5%	3.2) 25%	4) Отверяем на 10%; НЕ отвергаем на 1% и 5% уровнях значимости.
---------	----------	---

**Задача №5**

$R = 0,41113$	$\sigma = 0,00214$	$[0,40762; 0,41464]$
---------------	--------------------	----------------------

**Задачи №6**

6.1) $E = 540,00$ у.е.	$\sigma = 16,45$ у.е.	6.2) 75%	6.3) 10856 шт.
------------------------	-----------------------	----------	----------------

**Задача №7**

$W = 0,2374$	$R_{\text{опт}} = 9,011\%$	$\sigma_{\text{опт}} = 5,211\%$	$[-1,20\%; 19,22\%]$
--------------	----------------------------	---------------------------------	----------------------

**Задача №8**

$D(X) = 102,0426$	$\sigma(X) = 10,1016$	$\text{Cov}(X; Y) = 45,9179$
$D(Y) = 78,2166$	$\sigma(Y) = 8,844$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,514$
$\beta_1 = 0,45$	$\beta_0 = 9,6745$	
$\text{TSS} = 391,083$	$\text{ESS} = 103,3124$	$\text{RSS} = 287,7706$
$R^2 = 0,2642$	$R^2_{\text{adj}} = 0,0802$	$F = 1,436$

Модель ЗНАЧИМА на 50% уровне значимости и НЕ Значима на 10%.

**Задача №9**

9.1)	$t_0 = 3,08$ ***	$t_1 = 2,27$ **
	$t_2 = 3,08$ ***	$t_3 = 2,27$ **

9.2)  $Y = 87\ 684$  руб.

9.3) $\Delta Y = -22\ 657$	$\sigma = 7\ 356$	$[-34720,8; -10593,2]$
----------------------------	-------------------	------------------------

**Задачи №10**

10.1) $\Delta \ln Y = 0,0696$	$\sigma(\Delta \ln Y) = 0,0147$	$[0,0408; 0,0984]$
$Y_2/Y_1 = 1,0721$ (Увеличилась на 7,21%)		$[4,16\%; 10,34\%]$
10.2) $\Delta \ln Y = 0,105$	$\sigma(\Delta \ln Y) = 0,1218$	$[-0,0948; 0,3048]$
$Y_2/Y_1 = 1,1107$ (Увеличилась на 11,07%)		$[-9,04\%; 35,64\%]$



**Задача №1**

Дано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  (табл.). Найдите: математические ожидания  $E(X)$ ,  $E(Y)$  и  $E(XY)$ ; стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$ , корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ ; условные математические ожидания  $E(Y | X = 0)$ ;  $E(Y | X = 1)$ ;  $E(X | Y = 0)$ ;  $E(X | Y = 1)$ .

	$Y = 0$	$Y = 1$	Всего
$X = 0$	0,2821	0,0656	0,3477
$X = 1$	0,1377	0,5146	0,6523
Всего	0,4198	0,5802	1,0000

**Задача №2**

Завод производит лампы со средней продолжительностью работы 2370 ч. и стандартным отклонением 1150 ч. Известно, что продолжительность работы имеет нормальное распределение. Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 620 ламп. Найдите вероятность того, что:

- 2.1)  $X < 2279$  ч.
- 2.2)  $X > 2446$  ч.
- 2.3)  $2251$  ч.  $< X < 2339$  ч.
- 2.4)  $2294$  ч.  $< X < 2461$  ч.

**Задача №3**

В отделе технического контроля (ОТК) завода из задачи №2 проводится контроль выпущенной партии ламп. Тестируется нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 2370 ч. (стандарт)" против односторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп меньше 2370 ч. (брак)". Тест проводится следующим образом: Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 620 ламп. Если  $X > 2294$  ч., то нулевая гипотеза не отвергается.

- 3.1) Каков статистический размер этого теста?
- 3.2) Какова статистическая мощность рассмотренного теста, если нам известно, что, на самом деле, средняя продолжительность работы ламп составила 2218 ч., а стандартное отклонение не изменилось и равно 1150 ч.

**Задача №4**

В результате анализа получено, что средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 620 ламп, выпущенных заводом из задачи №2, составила 2453 ч.

На каких стандартных уровнях значимости (1%, 5% и 10%) отвергается (на каких - не отвергается) нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 2370 ч." против двухсторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп НЕ равна 2370 ч." (Стандартное отклонение такое же, как и в задаче №2.)

**Задача №5**

Проводится опрос 11652 случайно выбранных потенциальных избирателей. 6696 респондентов ответили, что будут голосовать за "нашего" кандидата, а остальные 4956 – за его соперника. Пусть  $R$  – доля всех избирателей, которые собираются отдать "голос" за "нашего" кандидата.

- 5.1) Используя результаты опроса, оцените величину  $R$  и её стандартное отклонение.
- 5.2) Постройте 95% доверительный интервал для оценки величины  $R$ .

**Задача №6**

В течение года ураган может нанести повреждения дому. Повреждения происходят случайным образом. Пусть  $U$  (в у.е.) – размер повреждений в данном году. Пусть в 11% случаев  $U = 54100$  у.е., в остальных случаях  $U = 0$ .

- 6.1) Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение для среднего выборочного  $\bar{U}$  по выборке из 8510 домов (дома выбираются независимо).
- 6.2) Какова вероятность того, что  $\bar{U}$  больше 6424 у.е.
- 6.3) Чему должно быть равно  $n$  – количество домов в выборке, если вероятность того, что среднее выборочное  $\bar{U}$  меньше 6178 у.е. составила 75%?

**Задача №7**

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 13% и стандартным отклонением 5,8%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 9% и стандартным отклонением 5%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,657.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 99% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

**Задача №8**

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	5,3	12,7	14,4	21,7	29,6	32,0	19,283
Y	5,5	18,9	50,2	101,8	181,9	120,1	79,733
X <sup>2</sup>	28,09	161,29	207,36	470,89	876,16	1024,00	461,298
Y <sup>2</sup>	30,25	357,21	2520,04	10363,24	33087,61	14424,01	10130,393
XY	29,15	240,03	722,88	2209,06	5384,24	3843,20	2071,427

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

**Задача №9**

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 40029(\pm 22238) + 9943(\pm 8609) X_1(i) + 24054(\pm 20826) X_2(i) + 1375(\pm 606) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Мужчины с высшим образованием 45 лет"?

9.3) Постройте 99% доверительный интервал для различия доходов "Мужчины с высшим образованием 45 лет" и "Мужчины с высшим образованием 20 лет".

**Задача №10**

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 5,371(\pm 3,77) + 0,678(\pm 0,503) \ln X_1(i) + 0,011(\pm 0,01) X_2(i) + 0,08(\pm 0,105) X_3(i) + 0,013(\pm 0,113) X_4(i) + 0,01(\pm 0,023) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,765; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 49% и количество спален увеличилось на 3. Постройте 99% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом испортить «прекрасный вид». Постройте 90% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,6523$	$\sigma(X) = 0,4762$	$E(Y   X = 0) = 0,1887$
$E(Y) = 0,5802$	$\sigma(Y) = 0,4935$	$E(Y   X = 1) = 0,7889$
$E(XY) = 0,5146$	$\text{cov}(X; Y) = 0,1361$	$E(X   Y = 0) = 0,3280$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,5791$	$E(X   Y = 1) = 0,8869$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 46,185 часов.

2.1) 2,5%	2.2) 5%	2.3) 24,5%	2.4) 92,5%
-----------	---------	------------	------------

**Задачи №3–4**

3.1) 5%	3.2) 95%	4) Отверяем на 10%; НЕ отвергаем на 1% и 5% уровнях значимости.
---------	----------	---

**Задача №5**

$R = 0,57467$	$\sigma = 0,00458$	$[0,56569; 0,58365]$
---------------	--------------------	----------------------

**Задачи №6**

6.1) $E = 5951,00$ у.е.	$\sigma = 183,49$ у.е.	6.2) 0,5%	6.3) 2497 шт.
-------------------------	------------------------	-----------	---------------

**Задача №7**

$W = 0,2896$	$R_{\text{опт}} = 10,158\%$	$\sigma_{\text{опт}} = 4,825\%$	$[-2,29\%; 22,61\%]$
--------------	-----------------------------	---------------------------------	----------------------

**Задача №8**

$D(X) = 107,3567$	$\sigma(X) = 10,3613$	$\text{Cov}(X; Y) = 640,7227$
$D(Y) = 4\,527,6501$	$\sigma(Y) = 67,2878$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,919$
$\beta_1 = 5,9682$	$\beta_0 = -35,3518$	
$\text{TSS} = 22\,638,2505$	$\text{ESS} = 19\,119,6999$	$\text{RSS} = 3\,518,5506$
$R^2 = 0,8446$	$R^2_{\text{adj}} = 0,8057$	$F = 21,7359$

Модель ЗНАЧИМА на всех уровнях значимости.

**Задача №9**

9.1)	$t_0 = 1,8^*$	$t_1 = 1,15$ не знач.
	$t_2 = 1,15$ не знач.	$t_3 = 2,27^{**}$

9.2)	$Y = 135\,901$ руб.
------	---------------------

9.3) $\Delta Y = -34\,375$	$\sigma = 15\,150$	$[-73462,0; 4712,0]$
----------------------------	--------------------	----------------------

**Задачи №10**

10.1) $\Delta \text{Ln} Y = 0,3034$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,2244$	$[-0,2756; 0,8824]$
$Y_2/Y_1 = 1,3545$ (Увеличилась на 35,45%)		$[-24,09\%; 141,67\%]$

10.2) $\Delta \text{Ln} Y = 0,067$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,1543$	$[-0,1861; 0,3201]$
$Y_2/Y_1 = 1,0693$ (Увеличилась на 6,93%)		$[-16,98\%; 37,73\%]$



**Задача №1**

Дано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  (табл.). Найдите: математические ожидания  $E(X)$ ,  $E(Y)$  и  $E(XY)$ ; стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$ , корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ ; условные математические ожидания  $E(Y | X = 0)$ ;  $E(Y | X = 1)$ ;  $E(X | Y = 0)$ ;  $E(X | Y = 1)$ .

	$Y = 0$	$Y = 1$	Всего
$X = 0$	0,1014	0,0790	0,1804
$X = 1$	0,2230	0,5966	0,8196
Всего	0,3244	0,6756	1,0000

**Задача №2**

Завод производит лампы со средней продолжительностью работы 10690 ч. и стандартным отклонением 1970 ч. Известно, что продолжительность работы имеет нормальное распределение. Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 110 ламп. Найдите вероятность того, что:

- 2.1)  $X < 11175$  ч.
- 2.2)  $X > 10322$  ч.
- 2.3)  $10816$  ч.  $< X < 10998$  ч.
- 2.4)  $10322$  ч.  $< X < 11175$  ч.

**Задача №3**

В отделе технического контроля (ОТК) завода из задачи №2 проводится контроль выпущенной партии ламп. Тестируется нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 10690 ч. (стандарт)" против односторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп меньше 10690 ч. (брак)". Тест проводится следующим образом: Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 110 ламп. Если  $X > 10382$  ч., то нулевая гипотеза не отвергается.

- 3.1) Каков статистический размер этого теста?
- 3.2) Какова статистическая мощность рассмотренного теста, если нам известно, что, на самом деле, средняя продолжительность работы ламп не изменилась и равна 10690 ч., а стандартное отклонение составило 4821 ч.

**Задача №4**

В результате анализа получено, что средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 110 ламп, выпущенных заводом из задачи №2, составила 10352 ч.

На каких стандартных уровнях значимости (1%, 5% и 10%) отвергается (на каких - не отвергается) нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 10690 ч." против двухсторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп НЕ равна 10690 ч." (Стандартное отклонение такое же, как и в задаче №2.)

**Задача №5**

Проводится опрос 53485 случайно выбранных потенциальных избирателей. 33792 респондентов ответили, что будут голосовать за "нашего" кандидата, а остальные 19693 – за его соперника. Пусть  $R$  – доля всех избирателей, которые собираются отдать "голос" за "нашего" кандидата.

- 5.1) Используя результаты опроса, оцените величину  $R$  и её стандартное отклонение.
- 5.2) Постройте 99% доверительный интервал для оценки величины  $R$ .

**Задача №6**

В течение года ураган может нанести повреждения дому. Повреждения происходят случайным образом. Пусть  $U$  (в у.е.) – размер повреждений в данном году. Пусть в 8% случаев  $U = 50200$  у.е., в остальных случаях  $U = 0$ .

- 6.1) Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение для среднего выборочного  $\bar{U}$  по выборке из 2900 домов (дома выбираются независимо).
- 6.2) Какова вероятность того, что  $\bar{U}$  больше 4185 у.е.
- 6.3) Чему должно быть равно  $n$  – количество домов в выборке, если вероятность того, что среднее выборочное  $\bar{U}$  меньше 3524 у.е. составила 5%?

## Тестовый Вариант № КР1-19 (2023/24)

(продолжение)

### Задача №7

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 17,2% и стандартным отклонением 11,1%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 3,7% и стандартным отклонением 5,2%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,286.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 90% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

### Задача №8

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	9,7	17,8	23,3	33,9	44,8	49,4	29,817
Y	9,9	12,8	14,6	15,9	30,5	27,6	18,550
X <sup>2</sup>	94,09	316,84	542,89	1149,21	2007,04	2440,36	1091,738
Y <sup>2</sup>	98,01	163,84	213,16	252,81	930,25	761,76	403,305
XY	96,03	227,84	340,18	539,01	1366,40	1363,44	655,483

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

### Задача №9

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 59409(\pm 33005) + 6447(\pm 10745) X_1(i) + 21160(\pm 6870) X_2(i) + 573(\pm 318) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Мужчины с высшим образованием 42 лет"?

9.3) Постройте 95% доверительный интервал для различия доходов "Мужчины с высшим образованием 42 лет" и "Мужчины без высшего образования 42 лет".

### Задача №10

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 10,746(\pm 6,394) + 0,167(\pm 0,493) \ln X_1(i) + 0,011(\pm 0,008) X_2(i) + 0,059(\pm 0,109) X_3(i) + 0,098(\pm 0,05) X_4(i) + 0,018(\pm 0,086) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,599; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 38% и количество спален уменьшилось на 1. Постройте 99% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом испортить «прекрасный вид». Постройте 90% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.



**Задача №1**

$E(X) = 0,8196$	$\sigma(X) = 0,3845$	$E(Y   X = 0) = 0,4379$
$E(Y) = 0,6756$	$\sigma(Y) = 0,4682$	$E(Y   X = 1) = 0,7279$
$E(XY) = 0,5966$	$\text{cov}(X; Y) = 0,0429$	$E(X   Y = 0) = 0,6874$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,2383$	$E(X   Y = 1) = 0,8831$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 187,832 часов.

2.1) 99,5%	2.2) 97,5%	2.3) 20%	2.4) 97%
------------	------------	----------	----------

**Задачи №3–4**

3.1) 5%	3.2) 25%	4) Отверяем на 10%; НЕ отвергаем на 1% и 5% уровнях значимости.
---------	----------	---

**Задача №5**

$R = 0,63180$	$\sigma = 0,00209$	$[0,62641; 0,63719]$
---------------	--------------------	----------------------

**Задачи №6**

6.1) $E = 4016,00$ у.е.	$\sigma = 252,90$ у.е.	6.2) 25%	6.3) 2061 шт.
-------------------------	------------------------	----------	---------------

**Задача №7**

$W = 0,0898$	$R_{\text{опт}} = 4,912\%$	$\sigma_{\text{опт}} = 5,108\%$	$[-3,47\%; 13,29\%]$
--------------	----------------------------	---------------------------------	----------------------

**Задача №8**

$D(X) = 243,2214$	$\sigma(X) = 15,5956$	$\text{Cov}(X; Y) = 122,8532$
$D(Y) = 71,043$	$\sigma(Y) = 8,4287$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,9346$
$\beta_1 = 0,5051$	$\beta_0 = 3,4894$	
$\text{TSS} = 355,215$	$\text{ESS} = 310,271$	$\text{RSS} = 44,944$
$R^2 = 0,8735$	$R^2_{\text{adj}} = 0,8418$	$F = 27,614$

Модель ЗНАЧИМА на всех уровнях значимости.

**Задача №9**

9.1)	$t_0 = 1,8^*$	$t_1 = 0,6$ не знач.
	$t_2 = 3,08^{***}$	$t_3 = 1,8^*$

9.2)	$Y = 111\,082$ руб.
------	---------------------

9.3) $\Delta Y = -21\,160$	$\sigma = 6\,870$	$[-34625,2; -7694,8]$
----------------------------	-------------------	-----------------------

**Задачи №10**

10.1) $\Delta \text{Ln}Y = 0,0428$	$\sigma(\Delta \text{Ln}Y) = 0,1541$	$[-0,3548; 0,4404]$
$Y_2/Y_1 = 1,0437$ (Увеличилась на 4,37%)		$[-29,87\%; 55,33\%]$
10.2) $\Delta \text{Ln}Y = -0,039$	$\sigma(\Delta \text{Ln}Y) = 0,1199$	$[-0,2356; 0,1576]$
$Y_2/Y_1 = 0,9618$ (Уменьшилась на 3,82%)		$[-20,99\%; 17,07\%]$



**Задача №7**

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 11% и стандартным отклонением 5,5%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 6,3% и стандартным отклонением 4,1%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,612.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 99% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

**Задача №8**

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	8,4	17,2	26,1	27,8	33,6	38,0	25,183
Y	6,8	9,3	21,6	41,4	31,5	41,9	25,417
X <sup>2</sup>	70,56	295,84	681,21	772,84	1128,96	1444,00	732,235
Y <sup>2</sup>	46,24	86,49	466,56	1713,96	992,25	1755,61	843,518
XY	57,12	159,96	563,76	1150,92	1058,40	1592,20	763,727

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

**Задача №9**

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 55979(\pm 48467) + 9728(\pm 5404) X_1(i) + 23716(\pm 10448) X_2(i) + 601(\pm 195) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Мужчины без высшего образования 34 лет"?

9.3) Постройте 99% доверительный интервал для различия доходов "Мужчины без высшего образования 34 лет" и "Женщины без высшего образования 34 лет".

**Задача №10**

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 9,148(\pm 5,836) + 0,737(\pm 0,526) \ln X_1(i) + 0,011(\pm 0,005) X_2(i) + 0,1(\pm 0,025) X_3(i) + 0,069(\pm 0,055) X_4(i) + 0,014(\pm 0,036) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,866; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 37% и количество спален уменьшилось на 3. Постройте 99% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом НЕ испортить «прекрасный вид». Постройте 95% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,6479$	$\sigma(X) = 0,4776$	$E(Y   X = 0) = 0,6487$
$E(Y) = 0,5827$	$\sigma(Y) = 0,4931$	$E(Y   X = 1) = 0,5468$
$E(XY) = 0,3543$	$\text{cov}(X; Y) = -0,0232$	$E(X   Y = 0) = 0,7036$
	$\text{corr}(X; Y) = -0,0985$	$E(X   Y = 1) = 0,6080$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 28,113 часов.

2.1) 0,5%	2.2) 97,5%	2.3) 74,5%	2.4) 20%
-----------	------------	------------	----------

**Задачи №3–4**

3.1) 5%	3.2) 25%	4) Отвергаем на 10%; НЕ отвергаем на 1% и 5% уровнях значимости.
---------	----------	--

**Задача №5**

$R = 0,69088$	$\sigma = 0,00203$	$[0,68690; 0,69486]$
---------------	--------------------	----------------------

**Задачи №6**

6.1) $E = 296,00$ у.е.	$\sigma = 10,89$ у.е.	6.2) 99,5%	6.3) 9677 шт.
------------------------	-----------------------	------------	---------------

**Задача №7**

$W = 0,1547$	$R_{\text{опт}} = 7,027\%$	$\sigma_{\text{опт}} = 4,043\%$	$[-3,40\%; 17,46\%]$
--------------	----------------------------	---------------------------------	----------------------

**Задача №8**

$D(X) = 117,6618$	$\sigma(X) = 10,8472$	$\text{Cov}(X; Y) = 148,3808$
$D(Y) = 236,9929$	$\sigma(Y) = 15,3946$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,8886$
$\beta_1 = 1,2611$	$\beta_0 = -6,3413$	
$\text{TSS} = 1\ 184,9645$	$\text{ESS} = 935,5994$	$\text{RSS} = 249,3651$
$R^2 = 0,7896$	$R^2_{\text{adj}} = 0,7369$	$F = 15,0077$

Модель ЗНАЧИМА на 5% уровне значимости и НЕ Значима на 1%.

**Задача №9**

9.1)	$t_0 = 1,15$ не знач.	$t_1 = 1,8$ *
	$t_2 = 2,27$ **	$t_3 = 3,08$ ***

9.2)  $Y = 86\ 141$  руб.

9.3) $\Delta Y = -9\ 728$	$\sigma = 5\ 404$	$[-23670,3; 4214,3]$
---------------------------	-------------------	----------------------

**Задачи №10**

10.1) $\Delta \text{Ln} Y = 0,199$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,1528$	$[-0,1952; 0,5932]$
$Y_2/Y_1 = 1,2202$ (Увеличилась на 22,02%)		$[-17,73\%; 80,98\%]$
10.2) $\Delta \text{Ln} Y = 0,114$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,0438$	$[0,0282; 0,1998]$
$Y_2/Y_1 = 1,1208$ (Увеличилась на 12,08%)		$[2,86\%; 22,12\%]$



**Задача №1**

Дано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  (табл.). Найдите: математические ожидания  $E(X)$ ,  $E(Y)$  и  $E(XY)$ ; стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$ , корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ ; условные математические ожидания  $E(Y | X = 0)$ ;  $E(Y | X = 1)$ ;  $E(X | Y = 0)$ ;  $E(X | Y = 1)$ .

	$Y = 0$	$Y = 1$	Всего
$X = 0$	0,1814	0,2565	0,4379
$X = 1$	0,0490	0,5131	0,5621
Всего	0,2304	0,7696	1,0000

**Задача №2**

Завод производит лампы со средней продолжительностью работы 9180 ч. и стандартным отклонением 1390 ч. Известно, что продолжительность работы имеет нормальное распределение. Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 230 ламп. Найдите вероятность того, что:

- 2.1)  $X < 9241$  ч.
- 2.2)  $X > 9000$  ч.
- 2.3)  $9030$  ч.  $< X < 9416$  ч.
- 2.4)  $9000$  ч.  $< X < 9119$  ч.

**Задача №3**

В отделе технического контроля (ОТК) завода из задачи №2 проводится контроль выпущенной партии ламп. Тестируется нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 9180 ч. (стандарт)" против односторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп меньше 9180 ч. (брак)". Тест проводится следующим образом: Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 230 ламп. Если  $X > 9119$  ч., то нулевая гипотеза не отвергается.

- 3.1) Каков статистический размер этого теста?
- 3.2) Какова статистическая мощность рассмотренного теста, если нам известно, что, на самом деле, средняя продолжительность работы ламп составила 8939 ч., а стандартное отклонение не изменилось и равно 1390 ч.

**Задача №4**

В результате анализа получено, что средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 230 ламп, выпущенных заводом из задачи №2, составила 9388 ч.

На каких стандартных уровнях значимости (1%, 5% и 10%) отвергается (на каких - не отвергается) нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 9180 ч." против двухсторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп НЕ равна 9180 ч." (Стандартное отклонение такое же, как и в задаче №2.)

**Задача №5**

Проводится опрос 33417 случайно выбранных потенциальных избирателей. 17389 респондентов ответили, что будут голосовать за "нашего" кандидата, а остальные 16028 – за его соперника. Пусть  $R$  – доля всех избирателей, которые собираются отдать "голос" за "нашего" кандидата.

- 5.1) Используя результаты опроса, оцените величину  $R$  и её стандартное отклонение.
- 5.2) Постройте 90% доверительный интервал для оценки величины  $R$ .

**Задача №6**

В течение года ураган может нанести повреждения дому. Повреждения происходят случайным образом. Пусть  $U$  (в у.е.) – размер повреждений в данном году. Пусть в 31% случаев  $U = 61100$  у.е., в остальных случаях  $U = 0$ .

- 6.1) Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение для среднего выборочного  $\bar{U}$  по выборке из 2870 домов (дома выбираются независимо).
- 6.2) Какова вероятность того, что  $\bar{U}$  больше 17907 у.е.
- 6.3) Чему должно быть равно  $n$  – количество домов в выборке, если вероятность того, что среднее выборочное  $\bar{U}$  меньше 18718 у.е. составила 25%?

**Задача №7**

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 16% и стандартным отклонением 8,4%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 8,2% и стандартным отклонением 6,6%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,345.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 90% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

**Задача №8**

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	4,7	9,5	11,0	21,4	24,0	27,2	16,300
Y	3,6	5,3	6,3	14,8	21,6	19,9	11,917
X <sup>2</sup>	22,09	90,25	121,00	457,96	576,00	739,84	334,523
Y <sup>2</sup>	12,96	28,09	39,69	219,04	466,56	396,01	193,725
XY	16,92	50,35	69,30	316,72	518,40	541,28	252,162

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

**Задача №9**

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 50357(\pm 16350) + 11176(\pm 4923) X_1(i) + 17963(\pm 9979) X_2(i) + 1493(\pm 658) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Женщины без высшего образования 45 лет"?

9.3) Постройте 95% доверительный интервал для различия доходов "Женщины без высшего образования 45 лет" и "Женщины с высшим образованием 45 лет".

**Задача №10**

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 7,093(\pm 4,88) + 0,462(\pm 0,294) \ln X_1(i) + 0,007(\pm 0,007) X_2(i) + 0,035(\pm 0,074) X_3(i) + 0,022(\pm 0,106) X_4(i) + 0,023(\pm 0,019) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,609; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 19% и количество спален увеличилось на 3. Постройте 99% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом НЕ испортить «прекрасный вид». Постройте 90% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,5621$	$\sigma(X) = 0,4961$	$E(Y   X = 0) = 0,5858$
$E(Y) = 0,7696$	$\sigma(Y) = 0,4211$	$E(Y   X = 1) = 0,9128$
$E(XY) = 0,5131$	$\text{cov}(X; Y) = 0,0805$	$E(X   Y = 0) = 0,2127$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,3853$	$E(X   Y = 1) = 0,6667$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 91,654 часов.

2.1) 75%	2.2) 97,5%	2.3) 94,5%	2.4) 22,5%
----------	------------	------------	------------

**Задачи №3–4**

3.1) 25%	3.2) 97,5%	4) Отвергаем на 5% и 10%; НЕ отвергаем на 1% уровне значимости.
----------	------------	---

**Задача №5**

$R = 0,52036$	$\sigma = 0,00273$	$[0,51588; 0,52484]$
---------------	--------------------	----------------------

**Задачи №6**

6.1) $E = 18941,00$ у.е.	$\sigma = 527,48$ у.е.	6.2) 97,5%	6.3) 7209 шт.
--------------------------	------------------------	------------	---------------

**Задача №7**

$W = 0,3221$	$R_{\text{опт}} = 10,712\%$	$\sigma_{\text{опт}} = 5,974\%$	$[0,91\%; 20,51\%]$
--------------	-----------------------------	---------------------------------	---------------------

**Задача №8**

$D(X) = 82,5996$	$\sigma(X) = 9,0884$	$\text{Cov}(X; Y) = 69,4979$
$D(Y) = 62,0521$	$\sigma(Y) = 7,8773$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,9707$
$\beta_1 = 0,8414$	$\beta_0 = -1,7978$	
$\text{TSS} = 310,2605$	$\text{ESS} = 292,3718$	$\text{RSS} = 17,8887$
$R^2 = 0,9423$	$R^2_{\text{adj}} = 0,9279$	$F = 65,3758$

Модель ЗНАЧИМА на всех уровнях значимости.

**Задача №9**

9.1)	$t_0 = 3,08$ ***	$t_1 = 2,27$ **
	$t_2 = 1,8$ *	$t_3 = 2,27$ **

9.2)  $Y = 117\,542$  руб.

9.3) $\Delta Y = 17\,963$	$\sigma = 9\,979$	$[-1595,8; 37521,8]$
---------------------------	-------------------	----------------------

**Задачи №10**

10.1) $\Delta \text{Ln} Y = 0,1014$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,0661$	$[-0,0691; 0,2719]$
$Y_2/Y_1 = 1,1067$ (Увеличилась на 10,67%)		$[-6,68\%; 31,25\%]$
10.2) $\Delta \text{Ln} Y = 0,058$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,0764$	$[-0,0673; 0,1833]$
$Y_2/Y_1 = 1,0597$ (Увеличилась на 5,97%)		$[-6,51\%; 20,12\%]$





## Тестовый Вариант № КР1-22 (2023/24)

(продолжение)

### Задача №7

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 14,6% и стандартным отклонением 9,4%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 5,4% и стандартным отклонением 7,7%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,203.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 95% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

### Задача №8

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	3,3	11,5	22,1	25,3	32,3	33,4	21,317
Y	6,2	17,1	38,3	33,1	56,2	77,0	37,983
X <sup>2</sup>	10,89	132,25	488,41	640,09	1043,29	1115,56	571,748
Y <sup>2</sup>	38,44	292,41	1466,89	1095,61	3158,44	5929,00	1996,798
XY	20,46	196,65	846,43	837,43	1815,26	2571,80	1048,005

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

### Задача №9

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 43437(\pm 24132) + 6040(\pm 2661) X_1(i) + 23723(\pm 10451) X_2(i) + 706(\pm 311) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Мужчины без высшего образования 28 лет"?

9.3) Постройте 90% доверительный интервал для различия доходов "Мужчины без высшего образования 28 лет" и "Мужчины с высшим образованием 28 лет".

### Задача №10

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 10,214(\pm 4,637) + 0,367(\pm 0,396) \ln X_1(i) + 0,005(\pm 0,013) X_2(i) + 0,083(\pm 0,106) X_3(i) + 0,109(\pm 0,089) X_4(i) + 0,007(\pm 0,039) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,304; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 30% и количество спален увеличилось на 3. Постройте 99% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом испортить «прекрасный вид». Постройте 90% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,7344$	$\sigma(X) = 0,4417$	$E(Y   X = 0) = 0,2662$
$E(Y) = 0,5563$	$\sigma(Y) = 0,4968$	$E(Y   X = 1) = 0,6612$
$E(XY) = 0,4856$	$\text{cov}(X; Y) = 0,0771$	$E(X   Y = 0) = 0,5607$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,3514$	$E(X   Y = 1) = 0,8729$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 32,116 часов.

2.1) 99,5%	2.2) 25%	2.3) 72,5%	2.4) 2%
------------	----------	------------	---------

**Задачи №3–4**

3.1) 2,5%	3.2) 75%	4) Отвергаем на всех уровнях значимости.
-----------	----------	--

**Задача №5**

$R = 0,47589$	$\sigma = 0,00334$	$[0,46727; 0,48451]$
---------------	--------------------	----------------------

**Задачи №6**

6.1) $E = 12685,00$ у.е.	$\sigma = 292,68$ у.е.	6.2) 99,5%	6.3) 3542 шт.
--------------------------	------------------------	------------	---------------

**Задача №7**

$W = 0,3771$	$R_{\text{опт}} = 8,869\%$	$\sigma_{\text{опт}} = 6,517\%$	$[-3,90\%; 21,64\%]$
--------------	----------------------------	---------------------------------	----------------------

**Задача №8**

$D(X) = 140,8002$	$\sigma(X) = 11,8659$	$\text{Cov}(X; Y) = 285,9857$
$D(Y) = 664,9077$	$\sigma(Y) = 25,7858$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,9347$
$\beta_1 = 2,0311$	$\beta_0 = -5,314$	
$\text{TSS} = 3\,324,5385$	$\text{ESS} = 2\,904,3929$	$\text{RSS} = 420,1456$
$R^2 = 0,8736$	$R^2_{\text{adj}} = 0,842$	$F = 27,6513$

Модель ЗНАЧИМА на всех уровнях значимости.

**Задача №9**

9.1)	$t_0 = 1,8^*$	$t_1 = 2,27^{**}$
	$t_2 = 2,27^{**}$	$t_3 = 2,27^{**}$

9.2)	$Y = 69\,245$ руб.
------	--------------------

9.3) $\Delta Y = 23\,723$	$\sigma = 10\,451$	$[6583,4; 40862,6]$
---------------------------	--------------------	---------------------

**Задачи №10**

10.1) $\Delta \ln Y = 0,1113$	$\sigma(\Delta \ln Y) = 0,1216$	$[-0,2024; 0,425]$
$Y_2/Y_1 = 1,1177$ (Увеличилась на 11,77%)		$[-18,32\%; 52,96\%]$
10.2) $\Delta \ln Y = -0,026$	$\sigma(\Delta \ln Y) = 0,1384$	$[-0,253; 0,201]$
$Y_2/Y_1 = 0,9743$ (Уменьшилась на 2,57%)		$[-22,35\%; 22,26\%]$



## Тестовый Вариант № КР1-23 (2023/24)

(продолжение)

### Задача №7

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 13,1% и стандартным отклонением 4,6%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 3,4% и стандартным отклонением 4,2%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,759.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 90% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

### Задача №8

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	2,9	10,3	16,7	20,9	29,2	39,0	19,833
Y	10,5	34,6	85,0	135,4	115,4	95,4	79,383
X <sup>2</sup>	8,41	106,09	278,89	436,81	852,64	1521,00	533,973
Y <sup>2</sup>	110,25	1197,16	7225,00	18333,16	13317,16	9101,16	8213,982
XY	30,45	356,38	1419,50	2829,86	3369,68	3720,60	1954,412

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

### Задача №9

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 45389(\pm 14737) + 11076(\pm 9590) X1(i) + 23811(\pm 13228) X2(i) + 941(\pm 306) X3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Мужчины без высшего образования 33 лет"?

9.3) Постройте 99% доверительный интервал для различия доходов "Мужчины без высшего образования 33 лет" и "Мужчины с высшим образованием 33 лет".

### Задача №10

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 9,496(\pm 7,977) + 0,736(\pm 0,187) \ln X1(i) + 0,008(\pm 0,012) X2(i) + 0,021(\pm 0,105) X3(i) + 0,05(\pm 0,117) X4(i) + 0,015(\pm 0,079) X3(i) X4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X1$  – площадь дома;  $X2$  – количество спален;  $X3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,628; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 39% и количество спален увеличилось на 2. Постройте 95% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом НЕ испортить «прекрасный вид». Постройте 90% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,7503$	$\sigma(X) = 0,4328$	$E(Y   X = 0) = 0,3468$
$E(Y) = 0,7388$	$\sigma(Y) = 0,4393$	$E(Y   X = 1) = 0,8693$
$E(XY) = 0,6522$	$\text{cov}(X; Y) = 0,0979$	$E(X   Y = 0) = 0,3756$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,5149$	$E(X   Y = 1) = 0,8828$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 19,486 часов.

2.1) 99,5%	2.2) 95%	2.3) 97%	2.4) 24,5%
------------	----------	----------	------------

**Задачи №3–4**

3.1) 25%	3.2) 75%	4) НЕ отвергаем на всех уровнях значимости.
----------	----------	---

**Задача №5**

$R = 0,70370$	$\sigma = 0,00567$	$[0,69440; 0,71300]$
---------------	--------------------	----------------------

**Задачи №6**

6.1) $E = 924,00$ у.е.	$\sigma = 17,28$ у.е.	6.2) 75%	6.3) 8735 шт.
------------------------	-----------------------	----------	---------------

**Задача №7**

$W = 0,3142$	$R_{\text{опт}} = 6,448\%$	$\sigma_{\text{опт}} = 4,087\%$	$[-0,25\%; 13,15\%]$
--------------	----------------------------	---------------------------------	----------------------

**Задача №8**

$D(X) = 168,7501$	$\sigma(X) = 12,9904$	$\text{Cov}(X; Y) = 456,0108$
$D(Y) = 2\,294,7856$	$\sigma(Y) = 47,9039$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,7328$
$\beta_1 = 2,7023$	$\beta_0 = 25,7883$	
$\text{TSS} = 11\,473,928$	$\text{ESS} = 6\,161,3549$	$\text{RSS} = 5\,312,5731$
$R^2 = 0,537$	$R^2_{\text{adj}} = 0,4212$	$F = 4,6391$

Модель ЗНАЧИМА на 10% уровне значимости и НЕ Значима на 5%.

**Задача №9**

9.1)	$t_0 = 3,08$ ***	$t_1 = 1,15$ не знач.
	$t_2 = 1,8$ *	$t_3 = 3,08$ ***
9.2)	$Y = 87\,518$ руб.	
9.3) $\Delta Y = 23\,811$	$\sigma = 13\,228$	$[-10317,2; 57939,2]$

**Задачи №10**

10.1) $\Delta \text{Ln} Y = 0,2584$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,0789$	$[0,1038; 0,413]$
$Y_2/Y_1 = 1,2949$ (Увеличилась на 29,49%)		$[10,94\%; 51,13\%]$
10.2) $\Delta \text{Ln} Y = 0,036$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,1314$	$[-0,1795; 0,2515]$
$Y_2/Y_1 = 1,0367$ (Увеличилась на 3,67%)		$[-16,43\%; 28,6\%]$

**Задача №1**

Дано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  (табл.). Найдите: математические ожидания  $E(X)$ ,  $E(Y)$  и  $E(XY)$ ; стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$ , корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ ; условные математические ожидания  $E(Y | X = 0)$ ;  $E(Y | X = 1)$ ;  $E(X | Y = 0)$ ;  $E(X | Y = 1)$ .

	$Y = 0$	$Y = 1$	Всего
$X = 0$	0,2225	0,0489	0,2714
$X = 1$	0,1729	0,5557	0,7286
Всего	0,3954	0,6046	1,0000

**Задача №2**

Завод производит лампы со средней продолжительностью работы 4090 ч. и стандартным отклонением 1720 ч. Известно, что продолжительность работы имеет нормальное распределение. Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 560 ламп. Найдите вероятность того, что:

- 2.1)  $X < 4041$  ч.
- 2.2)  $X > 4278$  ч.
- 2.3)  $4139$  ч.  $< X < 4209$  ч.
- 2.4)  $3971$  ч.  $< X < 4232$  ч.

**Задача №3**

В отделе технического контроля (ОТК) завода из задачи №2 проводится контроль выпущенной партии ламп. Тестируется нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 4090 ч. (стандарт)" против односторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп меньше 4090 ч. (брак)". Тест проводится следующим образом: Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 560 ламп. Если  $X > 3902$  ч., то нулевая гипотеза не отвергается.

- 3.1) Каков статистический размер этого теста?
- 3.2) Какова статистическая мощность рассмотренного теста, если нам известно, что, на самом деле, средняя продолжительность работы ламп не изменилась и равна 4090 ч., а стандартное отклонение составило 2713 ч.

**Задача №4**

В результате анализа получено, что средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 560 ламп, выпущенных заводом из задачи №2, составила 3925 ч.

На каких стандартных уровнях значимости (1%, 5% и 10%) отвергается (на каких - не отвергается) нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 4090 ч." против двухсторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп НЕ равна 4090 ч." (Стандартное отклонение такое же, как и в задаче №2.)

**Задача №5**

Проводится опрос 25638 случайно выбранных потенциальных избирателей. 8652 респондентов ответили, что будут голосовать за "нашего" кандидата, а остальные 16986 – за его соперника. Пусть  $R$  – доля всех избирателей, которые собираются отдать "голос" за "нашего" кандидата.

- 5.1) Используя результаты опроса, оцените величину  $R$  и её стандартное отклонение.
- 5.2) Постройте 95% доверительный интервал для оценки величины  $R$ .

**Задача №6**

В течение года ураган может нанести повреждения дому. Повреждения происходят случайным образом. Пусть  $U$  (в у.е.) – размер повреждений в данном году. Пусть в 15% случаев  $U = 25000$  у.е., в остальных случаях  $U = 0$ .

- 6.1) Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение для среднего выборочного  $\bar{U}$  по выборке из 7080 домов (дома выбираются независимо).
- 6.2) Какова вероятность того, что  $\bar{U}$  больше 3924 у.е.
- 6.3) Чему должно быть равно  $n$  – количество домов в выборке, если вероятность того, что среднее выборочное  $\bar{U}$  меньше 3972 у.е. составила 99,5%?

## Тестовый Вариант № КР1-24 (2023/24)

(продолжение)

### Задача №7

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 18% и стандартным отклонением 10,9%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 10,4% и стандартным отклонением 2,5%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,171.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 99% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

### Задача №8

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	7,3	15,6	25,0	35,9	46,4	49,9	30,017
Y	5,0	7,5	4,4	2,6	3,1	2,5	4,183
X <sup>2</sup>	53,29	243,36	625,00	1288,81	2152,96	2490,01	1142,238
Y <sup>2</sup>	25,00	56,25	19,36	6,76	9,61	6,25	20,538
XY	36,50	117,00	110,00	93,34	143,84	124,75	104,238

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

### Задача №9

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 51424(\pm 44523) + 11281(\pm 3663) X_1(i) + 22695(\pm 7369) X_2(i) + 1214(\pm 1051) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Мужчины с высшим образованием 29 лет"?

9.3) Постройте 90% доверительный интервал для различия доходов "Мужчины с высшим образованием 29 лет" и "Женщины с высшим образованием 29 лет".

### Задача №10

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 8,824(\pm 3,724) + 0,367(\pm 0,672) \ln X_1(i) + 0,015(\pm 0,009) X_2(i) + 0,04(\pm 0,051) X_3(i) + 0,115(\pm 0,078) X_4(i) + 0,013(\pm 0,015) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,688; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 19% и количество спален увеличилось на 2. Постройте 99% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом НЕ испортить «прекрасный вид». Постройте 95% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,7286$	$\sigma(X) = 0,4447$	$E(Y   X = 0) = 0,1802$
$E(Y) = 0,6046$	$\sigma(Y) = 0,4889$	$E(Y   X = 1) = 0,7627$
$E(XY) = 0,5557$	$\text{cov}(X; Y) = 0,1152$	$E(X   Y = 0) = 0,4373$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,5299$	$E(X   Y = 1) = 0,9191$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 72,683 часов.

2.1) 25%	2.2) 0,5%	2.3) 20%	2.4) 92,5%
----------	-----------	----------	------------

**Задачи №3–4**

3.1) 0,5%	3.2) 5%	4) Отвергаем на 5% и 10%; НЕ отвергаем на 1% уровне значимости.
-----------	---------	---

**Задача №5**

$R = 0,33747$	$\sigma = 0,00295$	$[0,33169; 0,34325]$
---------------	--------------------	----------------------

**Задачи №6**

6.1) $E = 3750,00$ у.е.	$\sigma = 106,09$ у.е.	6.2) 5%	6.3) 10763 шт.
-------------------------	------------------------	---------	----------------

**Задача №7**

$W = 0,0137$	$R_{\text{опт}} = 10,504\%$	$\sigma_{\text{опт}} = 2,496\%$	$[4,06\%; 16,94\%]$
--------------	-----------------------------	---------------------------------	---------------------

**Задача №8**

$D(X) = 289,4613$	$\sigma(X) = 17,0136$	$\text{Cov}(X; Y) = -25,5877$
$D(Y) = 3,6486$	$\sigma(Y) = 1,9101$	$\text{Corr}(X; Y) = -0,7874$
$\beta_1 = -0,0884$	$\beta_0 = 6,8365$	
$\text{TSS} = 18,243$	$\text{ESS} = 11,3095$	$\text{RSS} = 6,9335$
$R^2 = 0,6199$	$R^2_{\text{adj}} = 0,5249$	$F = 6,5246$

Модель ЗНАЧИМА на 10% уровне значимости и НЕ Значима на 5%.

**Задача №9**

9.1)	$t_0 = 1,15$ не знач.	$t_1 = 3,08$ ***
	$t_2 = 3,08$ ***	$t_3 = 1,16$ не знач.

9.2)  $Y = 120\ 606$  руб.

9.3) $\Delta Y = -11\ 281$	$\sigma = 3\ 663$	$[-17288,3; -5273,7]$
----------------------------	-------------------	-----------------------

**Задачи №10**

10.1) $\Delta \text{Ln} Y = 0,0938$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,1299$	$[-0,2413; 0,4289]$
$Y_2/Y_1 = 1,0983$ (Увеличилась на 9,83%)		$[-21,44\%; 53,56\%]$
10.2) $\Delta \text{Ln} Y = 0,053$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,0532$	$[-0,0513; 0,1573]$
$Y_2/Y_1 = 1,0544$ (Увеличилась на 5,44%)		$[-5\%; 17,03\%]$





**Задача №7**

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 15,4% и стандартным отклонением 4,8%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 4,1% и стандартным отклонением 3,7%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,597.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 90% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

**Задача №8**

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	7,6	9,4	14,6	16,7	18,9	26,3	15,583
Y	2,1	3,8	8,4	17,5	32,2	17,2	13,533
X <sup>2</sup>	57,76	88,36	213,16	278,89	357,21	691,69	281,178
Y <sup>2</sup>	4,41	14,44	70,56	306,25	1036,84	295,84	288,057
XY	15,96	35,72	122,64	292,25	608,58	452,36	254,585

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

**Задача №9**

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 72420(\pm 23513) + 13355(\pm 5883) X_1(i) + 15167(\pm 25278) X_2(i) + 1063(\pm 1772) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Женщины с высшим образованием 42 лет"?

9.3) Постройте 99% доверительный интервал для различия доходов "Женщины с высшим образованием 42 лет" и "Мужчины с высшим образованием 42 лет".

**Задача №10**

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 10,964(\pm 4,024) + 0,439(\pm 0,111) \ln X_1(i) + 0,01(\pm 0,01) X_2(i) + 0,09(\pm 0,096) X_3(i) + 0,11(\pm 0,101) X_4(i) + 0,008(\pm 0,066) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,34; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 49% и количество спален увеличилось на 1. Постройте 90% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом НЕ испортить «прекрасный вид». Постройте 95% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,6156$	$\sigma(X) = 0,4865$	$E(Y   X = 0) = 0,3202$
$E(Y) = 0,5916$	$\sigma(Y) = 0,4915$	$E(Y   X = 1) = 0,7610$
$E(XY) = 0,4685$	$\text{cov}(X; Y) = 0,1043$	$E(X   Y = 0) = 0,3602$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,4362$	$E(X   Y = 1) = 0,7919$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 84,593 часов.

2.1) 0,5%	2.2) 25%	2.3) 92,5%	2.4) 24,5%
-----------	----------	------------	------------

**Задачи №3–4**

3.1) 25%	3.2) 95%	4) НЕ отвергаем на всех уровнях значимости.
----------	----------	---

**Задача №5**

$R = 0,69058$	$\sigma = 0,00289$	$[0,68312; 0,69804]$
---------------	--------------------	----------------------

**Задачи №6**

6.1) $E = 23724,00$ у.е.	$\sigma = 563,60$ у.е.	6.2) 75%	6.3) 6781 шт.
--------------------------	------------------------	----------	---------------

**Задача №7**

$W = 0,1989$	$R_{\text{опт}} = 6,348\%$	$\sigma_{\text{опт}} = 3,616\%$	$[0,42\%; 12,28\%]$
--------------	----------------------------	---------------------------------	---------------------

**Задача №8**

$D(X) = 46,0177$	$\sigma(X) = 6,7836$	$\text{Cov}(X; Y) = 52,4403$
$D(Y) = 125,8979$	$\sigma(Y) = 11,2204$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,689$
$\beta_1 = 1,1396$	$\beta_0 = -4,2254$	
$\text{TSS} = 629,4895$	$\text{ESS} = 298,7964$	$\text{RSS} = 330,6931$
$R^2 = 0,4747$	$R^2_{\text{adj}} = 0,3433$	$F = 3,6142$

Модель ЗНАЧИМА на 50% уровне значимости и НЕ Значима на 10%.

**Задача №9**

9.1)	$t_0 = 3,08$ ***	$t_1 = 2,27$ **
	$t_2 = 0,6$ не знач.	$t_3 = 0,6$ не знач.
9.2)	$Y = 132\,233$ руб.	
9.3) $\Delta Y = 13\,355$	$\sigma = 5\,883$	$[-1823,1; 28533,1]$

**Задачи №10**

10.1) $\Delta \text{Ln} Y = 0,1851$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,0486$	$[0,1054; 0,2648]$
$Y_2/Y_1 = 1,2033$ (Увеличилась на 20,33%)		$[11,12\%; 30,32\%]$
10.2) $\Delta \text{Ln} Y = 0,098$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,1165$	$[-0,1303; 0,3263]$
$Y_2/Y_1 = 1,103$ (Увеличилась на 10,3%)		$[-12,22\%; 38,58\%]$



**Задача №1**

Дано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  (табл.). Найдите: математические ожидания  $E(X)$ ,  $E(Y)$  и  $E(XY)$ ; стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; ковариацию  $cov(X; Y)$ , корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ ; условные математические ожидания  $E(Y | X = 0)$ ;  $E(Y | X = 1)$ ;  $E(X | Y = 0)$ ;  $E(X | Y = 1)$ .

	$Y = 0$	$Y = 1$	Всего
$X = 0$	0,2297	0,1752	0,4049
$X = 1$	0,2900	0,3051	0,5951
Всего	0,5197	0,4803	1,0000

**Задача №2**

Завод производит лампы со средней продолжительностью работы 2560 ч. и стандартным отклонением 480 ч. Известно, что продолжительность работы имеет нормальное распределение. Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 1090 ламп. Найдите вероятность того, что:

- 2.1)  $X < 2536$  ч.
- 2.2)  $X > 2522$  ч.
- 2.3)  $2584$  ч.  $< X < 2588$  ч.
- 2.4)  $2522$  ч.  $< X < 2570$  ч.

**Задача №3**

В отделе технического контроля (ОТК) завода из задачи №2 проводится контроль выпущенной партии ламп. Тестируется нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 2560 ч. (стандарт)" против односторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп меньше 2560 ч. (брак)". Тест проводится следующим образом: Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 1090 ламп. Если  $X > 2550$  ч., то нулевая гипотеза не отвергается.

- 3.1) Каков статистический размер этого теста?
- 3.2) Какова статистическая мощность рассмотренного теста, если нам известно, что, на самом деле, средняя продолжительность работы ламп составила 2512 ч., а стандартное отклонение не изменилось и равно 480 ч.

**Задача №4**

В результате анализа получено, что средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 1090 ламп, выпущенных заводом из задачи №2, составила 2527 ч.

На каких стандартных уровнях значимости (1%, 5% и 10%) отвергается (на каких - не отвергается) нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 2560 ч." против двухсторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп НЕ равна 2560 ч." (Стандартное отклонение такое же, как и в задаче №2.)

**Задача №5**

Проводится опрос 16472 случайно выбранных потенциальных избирателей. 7870 респондентов ответили, что будут голосовать за "нашего" кандидата, а остальные 8602 – за его соперника. Пусть  $R$  – доля всех избирателей, которые собираются отдать "голос" за "нашего" кандидата.

- 5.1) Используя результаты опроса, оцените величину  $R$  и её стандартное отклонение.
- 5.2) Постройте 95% доверительный интервал для оценки величины  $R$ .

**Задача №6**

В течение года ураган может нанести повреждения дому. Повреждения происходят случайным образом. Пусть  $U$  (в у.е.) – размер повреждений в данном году. Пусть в 13% случаев  $U = 1300$  у.е., в остальных случаях  $U = 0$ .

- 6.1) Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение для среднего выборочного  $\bar{U}$  по выборке из 10040 домов (дома выбираются независимо).
- 6.2) Какова вероятность того, что  $\bar{U}$  больше 176 у.е.
- 6.3) Чему должно быть равно  $n$  – количество домов в выборке, если вероятность того, что среднее выборочное  $\bar{U}$  меньше 161 у.е. составила 2,5%?

## Тестовый Вариант № КР1-26 (2023/24)

(продолжение)

### Задача №7

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 19,7% и стандартным отклонением 11,6%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 3,7% и стандартным отклонением 7,8%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,178.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 99% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

### Задача №8

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	5,9	16,5	26,6	36,7	43,0	49,3	29,667
Y	11,4	27,5	15,7	15,1	23,5	27,0	20,033
X <sup>2</sup>	34,81	272,25	707,56	1346,89	1849,00	2430,49	1106,833
Y <sup>2</sup>	129,96	756,25	246,49	228,01	552,25	729,00	440,327
XY	67,26	453,75	417,62	554,17	1010,50	1331,10	639,067

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

### Задача №9

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 59871(\pm 33262) + 9478(\pm 15797) X_1(i) + 18451(\pm 10251) X_2(i) + 1372(\pm 445) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Женщины с высшим образованием 22 лет"?

9.3) Постройте 95% доверительный интервал для различия доходов "Женщины с высшим образованием 22 лет" и "Женщины без высшего образования 22 лет".

### Задача №10

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 4,874(\pm 2,286) + 0,678(\pm 0,13) \ln X_1(i) + 0,011(\pm 0,007) X_2(i) + 0,094(\pm 0,086) X_3(i) + 0,118(\pm 0,083) X_4(i) + 0,006(\pm 0,039) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,166; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 18% и количество спален увеличилось на 3. Постройте 99% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом испортить «прекрасный вид». Постройте 95% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,5951$	$\sigma(X) = 0,4909$	$E(Y   X = 0) = 0,4327$
$E(Y) = 0,4803$	$\sigma(Y) = 0,4996$	$E(Y   X = 1) = 0,5127$
$E(XY) = 0,3051$	$\text{cov}(X; Y) = 0,0193$	$E(X   Y = 0) = 0,5580$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,0787$	$E(X   Y = 1) = 0,6352$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 14,539 часов.

2.1) 5%	2.2) 99,5%	2.3) 2,5%	2.4) 74,5%
---------	------------	-----------	------------

**Задачи №3–4**

3.1) 25%	3.2) 99,5%	4) Отвергаем на 5% и 10%; НЕ отвергаем на 1% уровне значимости.
----------	------------	---

**Задача №5**

$R = 0,47778$	$\sigma = 0,00389$	$[0,47016; 0,48540]$
---------------	--------------------	----------------------

**Задачи №6**

6.1) $E = 169,00$ у.е.	$\sigma = 4,36$ у.е.	6.2) 5%	6.3) 11473 шт.
------------------------	----------------------	---------	----------------

**Задача №7**

$W = 0,2741$	$R_{\text{опт}} = 8,086\%$	$\sigma_{\text{опт}} = 6,970\%$	$[-9,90\%; 26,07\%]$
--------------	----------------------------	---------------------------------	----------------------

**Задача №8**

$D(X) = 272,0425$	$\sigma(X) = 16,4937$	$\text{Cov}(X; Y) = 53,6976$
$D(Y) = 46,8071$	$\sigma(Y) = 6,8416$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,4759$
$\beta_1 = 0,1974$	$\beta_0 = 14,1767$	
$\text{TSS} = 234,0355$	$\text{ESS} = 52,996$	$\text{RSS} = 181,0395$
$R^2 = 0,2264$	$R^2_{\text{adj}} = 0,0331$	$F = 1,1709$

Модель ЗНАЧИМА на 50% уровне значимости и НЕ Значима на 10%.

**Задача №9**

9.1)	$t_0 = 1,8 *$	$t_1 = 0,6$ не знач.
	$t_2 = 1,8 *$	$t_3 = 3,08 ***$

9.2)	$Y = 108\,506$ руб.
------	---------------------

9.3) $\Delta Y = -18\,451$	$\sigma = 10\,251$	$[-38543,0; 1641,0]$
----------------------------	--------------------	----------------------

**Задачи №10**

10.1) $\Delta \text{Ln} Y = 0,1452$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,0325$	$[0,0614; 0,2291]$
$Y_2/Y_1 = 1,1563$ (Увеличилась на 15,63%)		$[6,33\%; 25,75\%]$
10.2) $\Delta \text{Ln} Y = -0,024$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,1195$	$[-0,2582; 0,2102]$
$Y_2/Y_1 = 0,9763$ (Уменьшилась на 2,37%)		$[-22,76\%; 23,39\%]$



**Задача №1**

Дано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  (табл.). Найдите: математические ожидания  $E(X)$ ,  $E(Y)$  и  $E(XY)$ ; стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$ , корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ ; условные математические ожидания  $E(Y | X = 0)$ ;  $E(Y | X = 1)$ ;  $E(X | Y = 0)$ ;  $E(X | Y = 1)$ .

	$Y = 0$	$Y = 1$	Всего
$X = 0$	0,2750	0,2527	0,5277
$X = 1$	0,1125	0,3598	0,4723
Всего	0,3875	0,6125	1,0000

**Задача №2**

Завод производит лампы со средней продолжительностью работы 2330 ч. и стандартным отклонением 270 ч. Известно, что продолжительность работы имеет нормальное распределение. Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 1060 ламп. Найдите вероятность того, что:

- 2.1)  $X < 2351$  ч.
- 2.2)  $X > 2316$  ч.
- 2.3)  $2309$  ч.  $< X < 2324$  ч.
- 2.4)  $2316$  ч.  $< X < 2346$  ч.

**Задача №3**

В отделе технического контроля (ОТК) завода из задачи №2 проводится контроль выпущенной партии ламп. Тестируется нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 2330 ч. (стандарт)" против односторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп меньше 2330 ч. (брак)". Тест проводится следующим образом: Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 1060 ламп. Если  $X > 2314$  ч., то нулевая гипотеза не отвергается.

- 3.1) Каков статистический размер этого теста?
- 3.2) Какова статистическая мощность рассмотренного теста, если нам известно, что, на самом деле, средняя продолжительность работы ламп не изменилась и равна 2330 ч., а стандартное отклонение составило 318 ч.

**Задача №4**

В результате анализа получено, что средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 1060 ламп, выпущенных заводом из задачи №2, составила 2315 ч.

На каких стандартных уровнях значимости (1%, 5% и 10%) отвергается (на каких - не отвергается) нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 2330 ч." против двухсторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп НЕ равна 2330 ч." (Стандартное отклонение такое же, как и в задаче №2.)

**Задача №5**

Проводится опрос 33076 случайно выбранных потенциальных избирателей. 15766 респондентов ответили, что будут голосовать за "нашего" кандидата, а остальные 17310 – за его соперника. Пусть  $R$  – доля всех избирателей, которые собираются отдать "голос" за "нашего" кандидата.

- 5.1) Используя результаты опроса, оцените величину  $R$  и её стандартное отклонение.
- 5.2) Постройте 99% доверительный интервал для оценки величины  $R$ .

**Задача №6**

В течение года ураган может нанести повреждения дому. Повреждения происходят случайным образом. Пусть  $U$  (в у.е.) – размер повреждений в данном году. Пусть в 10% случаев  $U = 70200$  у.е., в остальных случаях  $U = 0$ .

- 6.1) Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение для среднего выборочного  $\bar{U}$  по выборке из 8940 домов (дома выбираются независимо).
- 6.2) Какова вероятность того, что  $\bar{U}$  больше 6445 у.е.
- 6.3) Чему должно быть равно  $n$  – количество домов в выборке, если вероятность того, что среднее выборочное  $\bar{U}$  меньше 6355 у.е. составила 5%?

## Тестовый Вариант № КР1-27 (2023/24)

(продолжение)

### Задача №7

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 16,7% и стандартным отклонением 5,9%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 4,6% и стандартным отклонением 3,7%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,421.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 90% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

### Задача №8

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	3,9	9,0	12,1	15,2	18,0	22,1	13,383
Y	11,8	23,9	16,1	37,3	31,0	26,4	24,417
X <sup>2</sup>	15,21	81,00	146,41	231,04	324,00	488,41	214,345
Y <sup>2</sup>	139,24	571,21	259,21	1391,29	961,00	696,96	669,818
XY	46,02	215,10	194,81	566,96	558,00	583,44	360,722

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

### Задача №9

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 37258(\pm 32258) + 11802(\pm 6557) X_1(i) + 16232(\pm 9018) X_2(i) + 1085(\pm 1808) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Женщины с высшим образованием 39 лет"?

9.3) Постройте 99% доверительный интервал для различия доходов "Женщины с высшим образованием 39 лет" и "Женщины без высшего образования 39 лет".

### Задача №10

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 5,146(\pm 4,354) + 0,311(\pm 0,509) \ln X_1(i) + 0,012(\pm 0,011) X_2(i) + 0,04(\pm 0,088) X_3(i) + 0,075(\pm 0,076) X_4(i) + 0,006(\pm 0,066) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,468; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 28% и количество спален уменьшилось на 2. Постройте 90% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом НЕ испортить «прекрасный вид». Постройте 99% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.



**Задача №1**

$E(X) = 0,4723$	$\sigma(X) = 0,4992$	$E(Y   X = 0) = 0,4789$
$E(Y) = 0,6125$	$\sigma(Y) = 0,4872$	$E(Y   X = 1) = 0,7618$
$E(XY) = 0,3598$	$\text{cov}(X; Y) = 0,0705$	$E(X   Y = 0) = 0,2903$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,2899$	$E(X   Y = 1) = 0,5874$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 8,293 часов.

2.1) 99,5%	2.2) 95%	2.3) 24,5%	2.4) 92,5%
------------	----------	------------	------------

**Задачи №3–4**

3.1) 2,5%	3.2) 5%	4) Отвергаем на 10%; НЕ отвергаем на 1% и 5% уровнях значимости.
-----------	---------	--

**Задача №5**

$R = 0,47666$	$\sigma = 0,00275$	$[0,46957; 0,48376]$
---------------	--------------------	----------------------

**Задачи №6**

6.1) $E = 7020,00$ у.е.	$\sigma = 222,74$ у.е.	6.2) 99,5%	6.3) 2698 шт.
-------------------------	------------------------	------------	---------------

**Задача №7**

$W = 0,1494$	$R_{\text{опт}} = 6,408\%$	$\sigma_{\text{опт}} = 3,608\%$	$[0,49\%; 12,33\%]$
--------------	----------------------------	---------------------------------	---------------------

**Задача №8**

$D(X) = 42,2884$	$\sigma(X) = 6,503$	$\text{Cov}(X; Y) = 40,7391$
$D(Y) = 88,3537$	$\sigma(Y) = 9,3997$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,6665$
$\beta_1 = 0,9634$	$\beta_0 = 11,5238$	
$\text{TSS} = 441,7685$	$\text{ESS} = 196,2328$	$\text{RSS} = 245,5357$
$R^2 = 0,4442$	$R^2_{\text{adj}} = 0,3052$	$F = 3,1968$

Модель ЗНАЧИМА на 50% уровне значимости и НЕ Значима на 10%.

**Задача №9**

9.1)	$t_0 = 1,16$ не знач.	$t_1 = 1,8$ *
	$t_2 = 1,8$ *	$t_3 = 0,6$ не знач.
9.2)	$Y = 95\,805$ руб.	
9.3) $\Delta Y = -16\,232$	$\sigma = 9\,018$	$[-39498,4; 7034,4]$

**Задачи №10**

10.1) $\Delta \ln Y = 0,0528$	$\sigma(\Delta \ln Y) = 0,117$	$[-0,1391; 0,2447]$
$Y_2/Y_1 = 1,0542$ (Увеличилась на 5,42%)		$[-12,99\%; 27,72\%]$
10.2) $\Delta \ln Y = 0,046$	$\sigma(\Delta \ln Y) = 0,11$	$[-0,2378; 0,3298]$
$Y_2/Y_1 = 1,0471$ (Увеличилась на 4,71%)		$[-21,16\%; 39,07\%]$



## Тестовый Вариант № КР1-28 (2023/24)

(продолжение)

### Задача №7

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 9,1% и стандартным отклонением 5,2%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 5,9% и стандартным отклонением 3,4%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,221.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 95% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

### Задача №8

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	5,1	15,3	22,6	32,4	40,4	43,9	26,617
Y	7,7	4,7	10,1	18,7	24,8	33,5	16,583
X <sup>2</sup>	26,01	234,09	510,76	1049,76	1632,16	1927,21	896,665
Y <sup>2</sup>	59,29	22,09	102,01	349,69	615,04	1122,25	378,395
XY	39,27	71,91	228,26	605,88	1001,92	1470,65	569,648

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

### Задача №9

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 61537(\pm 34187) + 6454(\pm 3586) X_1(i) + 22160(\pm 12311) X_2(i) + 671(\pm 1118) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Женщины без высшего образования 32 лет"?

9.3) Постройте 95% доверительный интервал для различия доходов "Женщины без высшего образования 32 лет" и "Женщины без высшего образования 23 лет".

### Задача №10

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 10,422(\pm 9,338) + 0,491(\pm 0,352) \ln X_1(i) + 0,005(\pm 0,006) X_2(i) + 0,017(\pm 0,032) X_3(i) + 0,065(\pm 0,041) X_4(i) + 0,014(\pm 0,046) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,846; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 15% и количество спален увеличилось на 1. Постройте 90% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом НЕ испортить «прекрасный вид». Постройте 95% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,8420$	$\sigma(X) = 0,3647$	$E(Y   X = 0) = 0,0785$
$E(Y) = 0,7172$	$\sigma(Y) = 0,4504$	$E(Y   X = 1) = 0,8371$
$E(XY) = 0,7048$	$\text{cov}(X; Y) = 0,1009$	$E(X   Y = 0) = 0,4851$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,6143$	$E(X   Y = 1) = 0,9827$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 42,784 часов.

2.1) 75%	2.2) 95%	2.3) 72,5%	2.4) 4,5%
----------	----------	------------	-----------

**Задачи №3-4**

3.1) 0,5%	3.2) 5%	4) Отвергаем на 5% и 10%; НЕ отвергаем на 1% уровне значимости.
-----------	---------	---

**Задача №5**

$R = 0,31578$	$\sigma = 0,00298$	$[0,30994; 0,32162]$
---------------	--------------------	----------------------

**Задачи №6**

6.1) $E = 1850,00$ у.е.	$\sigma = 79,04$ у.е.	6.2) 95%	6.3) 2833 шт.
-------------------------	-----------------------	----------	---------------

**Задача №7**

$W = 0,2486$	$R_{\text{опт}} = 6,696\%$	$\sigma_{\text{опт}} = 3,108\%$	$[0,60\%; 12,79\%]$
--------------	----------------------------	---------------------------------	---------------------

**Задача №8**

$D(X) = 225,8404$	$\sigma(X) = 15,028$	$\text{Cov}(X; Y) = 153,9099$
$D(Y) = 124,0789$	$\sigma(Y) = 11,1391$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,9194$
$\beta_1 = 0,6815$	$\beta_0 = -1,5565$	
$\text{TSS} = 620,3945$	$\text{ESS} = 524,4469$	$\text{RSS} = 95,9476$
$R^2 = 0,8453$	$R^2_{\text{adj}} = 0,8067$	$F = 21,8639$

Модель ЗНАЧИМА на всех уровнях значимости.

**Задача №9**

9.1)	$t_0 = 1,8^*$	$t_1 = 1,8^*$
	$t_2 = 1,8^*$	$t_3 = 0,6$ не знач.

9.2)	$Y = 83\,009$ руб.
------	--------------------

9.3) $\Delta Y = -6\,039$	$\sigma = 10\,062$	$[-25760,5; 13682,5]$
---------------------------	--------------------	-----------------------

**Задачи №10**

10.1) $\Delta \ln Y = 0,0736$	$\sigma(\Delta \ln Y) = 0,0544$	$[-0,0156; 0,1628]$
-------------------------------	---------------------------------	---------------------

$Y_2/Y_1 = 1,0764$ (Увеличилась на 7,64%)		$[-1,55\%; 17,68\%]$
---	--	----------------------

10.2) $\Delta \ln Y = 0,031$	$\sigma(\Delta \ln Y) = 0,056$	$[-0,0788; 0,1408]$
------------------------------	--------------------------------	---------------------

$Y_2/Y_1 = 1,0315$ (Увеличилась на 3,15%)		$[-7,58\%; 15,12\%]$
---	--	----------------------



**Задача №1**

Дано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  (табл.). Найдите: математические ожидания  $E(X)$ ,  $E(Y)$  и  $E(XY)$ ; стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$ , корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ ; условные математические ожидания  $E(Y | X = 0)$ ;  $E(Y | X = 1)$ ;  $E(X | Y = 0)$ ;  $E(X | Y = 1)$ .

	$Y = 0$	$Y = 1$	Всего
$X = 0$	0,0353	0,0561	0,0914
$X = 1$	0,2950	0,6136	0,9086
Всего	0,3303	0,6697	1,0000

**Задача №2**

Завод производит лампы со средней продолжительностью работы 3210 ч. и стандартным отклонением 920 ч. Известно, что продолжительность работы имеет нормальное распределение. Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 180 ламп. Найдите вероятность того, что:

- 2.1)  $X < 3076$  ч.
- 2.2)  $X > 3033$  ч.
- 2.3)  $3164$  ч.  $< X < 3387$  ч.
- 2.4)  $3033$  ч.  $< X < 3076$  ч.

**Задача №3**

В отделе технического контроля (ОТК) завода из задачи №2 проводится контроль выпущенной партии ламп. Тестируется нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 3210 ч. (стандарт)" против односторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп меньше 3210 ч. (брак)". Тест проводится следующим образом: Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 180 ламп. Если  $X > 3098$  ч., то нулевая гипотеза не отвергается.

- 3.1) Каков статистический размер этого теста?
- 3.2) Какова статистическая мощность рассмотренного теста, если нам известно, что, на самом деле, средняя продолжительность работы ламп составила 3144 ч., а стандартное отклонение не изменилось и равно 920 ч.

**Задача №4**

В результате анализа получено, что средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 180 ламп, выпущенных заводом из задачи №2, составила 3333 ч. На каких стандартных уровнях значимости (1%, 5% и 10%) отвергается (на каких - не отвергается) нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 3210 ч." против двухсторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп НЕ равна 3210 ч." (Стандартное отклонение такое же, как и в задаче №2.)

**Задача №5**

Проводится опрос 37205 случайно выбранных потенциальных избирателей. 23503 респондентов ответили, что будут голосовать за "нашего" кандидата, а остальные 13702 – за его соперника. Пусть  $R$  – доля всех избирателей, которые собираются отдать "голос" за "нашего" кандидата.

- 5.1) Используя результаты опроса, оцените величину  $R$  и её стандартное отклонение.
- 5.2) Постройте 90% доверительный интервал для оценки величины  $R$ .

**Задача №6**

В течение года ураган может нанести повреждения дому. Повреждения происходят случайным образом. Пусть  $U$  (в у.е.) – размер повреждений в данном году. Пусть в 38% случаев  $U = 35400$  у.е., в остальных случаях  $U = 0$ .

- 6.1) Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение для среднего выборочного  $\bar{U}$  по выборке из 11750 домов (дома выбираются независимо).
- 6.2) Какова вероятность того, что  $\bar{U}$  больше 13141 у.е.
- 6.3) Чему должно быть равно  $n$  – количество домов в выборке, если вероятность того, что среднее выборочное  $\bar{U}$  меньше 13571 у.е. составила 75%?

**Задача №7**

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 17,3% и стандартным отклонением 11,5%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 4,6% и стандартным отклонением 3,9%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,305.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 90% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

**Задача №8**

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	0,2	7,7	14,5	21,9	30,4	37,7	18,733
Y	5,7	17,6	10,7	10,5	9,3	5,0	9,800
X <sup>2</sup>	0,04	59,29	210,25	479,61	924,16	1421,29	515,773
Y <sup>2</sup>	32,49	309,76	114,49	110,25	86,49	25,00	113,080
XY	1,14	135,52	155,15	229,95	282,72	188,50	165,497

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

**Задача №9**

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 44924(\pm 14586) + 7969(\pm 2587) X_1(i) + 15786(\pm 5125) X_2(i) + 799(\pm 1332) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Мужчины с высшим образованием 42 лет"?

9.3) Постройте 99% доверительный интервал для различия доходов "Мужчины с высшим образованием 42 лет" и "Мужчины с высшим образованием 20 лет".

**Задача №10**

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 5,58(\pm 4,503) + 0,126(\pm 0,354) \ln X_1(i) + 0,009(\pm 0,008) X_2(i) + 0,07(\pm 0,096) X_3(i) + 0,013(\pm 0,015) X_4(i) + 0,023(\pm 0,028) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,464; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 40% и количество спален уменьшилось на 2. Постройте 90% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом НЕ испортить «прекрасный вид». Постройте 95% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,9086$	$\sigma(X) = 0,2882$	$E(Y   X = 0) = 0,6138$
$E(Y) = 0,6697$	$\sigma(Y) = 0,4703$	$E(Y   X = 1) = 0,6753$
$E(XY) = 0,6136$	$\text{cov}(X; Y) = 0,0051$	$E(X   Y = 0) = 0,8931$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,0376$	$E(X   Y = 1) = 0,9162$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 68,573 часов.

2.1) 2,5%	2.2) 99,5%	2.3) 74,5%	2.4) 2%
-----------	------------	------------	---------

**Задачи №3–4**

3.1) 5%	3.2) 25%	4) Отвергаем на 10%; НЕ отвергаем на 1% и 5% уровнях значимости.
---------	----------	--

**Задача №5**

$R = 0,63172$	$\sigma = 0,00250$	$[0,62762; 0,63582]$
---------------	--------------------	----------------------

**Задачи №6**

6.1) $E = 13452,00$ у.е.	$\sigma = 158,52$ у.е.	6.2) 97,5%	6.3) 9360 шт.
--------------------------	------------------------	------------	---------------

**Задача №7**

$W = 0,0127$	$R_{\text{опт}} = 4,761\%$	$\sigma_{\text{опт}} = 3,897\%$	$[-1,63\%; 11,15\%]$
--------------	----------------------------	---------------------------------	----------------------

**Задача №8**

$D(X) = 197,8173$	$\sigma(X) = 14,0648$	$\text{Cov}(X; Y) = -21,7037$
$D(Y) = 20,448$	$\sigma(Y) = 4,5219$	$\text{Corr}(X; Y) = -0,3413$
$\beta_1 = -0,1097$	$\beta_0 = 11,855$	
$TSS = 102,24$	$ESS = 11,9062$	$RSS = 90,3338$
$R^2 = 0,1165$	$R^2_{\text{adj}} = -0,1044$	$F = 0,5272$

Модель НЕ Значима на всех уровнях значимости.

**Задача №9**

9.1)	$t_0 = 3,08$ ***	$t_1 = 3,08$ ***
	$t_2 = 3,08$ ***	$t_3 = 0,6$ не знач.

9.2)	$Y = 102\,237$ руб.
------	---------------------

9.3) $\Delta Y = -17\,578$	$\sigma = 29\,304$	$[-93182,3; 58026,3]$
----------------------------	--------------------	-----------------------

**Задачи №10**

10.1) $\Delta \ln Y = 0,0244$	$\sigma(\Delta \ln Y) = 0,1126$	$[-0,1603; 0,2091]$
$Y_2/Y_1 = 1,0247$ (Увеличилась на 2,47%)		$[-14,81\%; 23,26\%]$
10.2) $\Delta \ln Y = 0,093$	$\sigma(\Delta \ln Y) = 0,1$	$[-0,103; 0,289]$
$Y_2/Y_1 = 1,0975$ (Увеличилась на 9,75%)		$[-9,79\%; 33,51\%]$





## Тестовый Вариант № КР1-30 (2023/24)

(продолжение)

### Задача №7

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 13,6% и стандартным отклонением 8,1%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 8,7% и стандартным отклонением 4,7%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,190.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 95% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

### Задача №8

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	4,4	5,9	16,4	22,1	33,0	34,1	19,317
Y	8,7	17,0	32,3	26,4	39,8	21,5	24,283
X <sup>2</sup>	19,36	34,81	268,96	488,41	1089,00	1162,81	510,558
Y <sup>2</sup>	75,69	289,00	1043,29	696,96	1584,04	462,25	691,872
XY	38,28	100,30	529,72	583,44	1313,40	733,15	549,715

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

### Задача №9

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 51021(\pm 44174) + 9917(\pm 8586) X_1(i) + 20363(\pm 33938) X_2(i) + 1323(\pm 2205) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Мужчины без высшего образования 45 лет"?

9.3) Постройте 90% доверительный интервал для различия доходов "Мужчины без высшего образования 45 лет" и "Женщины без высшего образования 45 лет".

### Задача №10

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 7,485(\pm 5,951) + 0,388(\pm 0,447) \ln X_1(i) + 0,006(\pm 0,007) X_2(i) + 0,022(\pm 0,039) X_3(i) + 0,096(\pm 0,103) X_4(i) + 0,014(\pm 0,049) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,901; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 49% и количество спален уменьшилось на 1. Постройте 99% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом испортить «прекрасный вид». Постройте 95% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,6779$	$\sigma(X) = 0,4673$	$E(Y   X = 0) = 0,7740$
$E(Y) = 0,6861$	$\sigma(Y) = 0,4641$	$E(Y   X = 1) = 0,6443$
$E(XY) = 0,4368$	$\text{cov}(X; Y) = -0,0283$	$E(X   Y = 0) = 0,7681$
	$\text{corr}(X; Y) = -0,1305$	$E(X   Y = 1) = 0,6366$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 45,839 часов.

2.1) 0,5%                      2.2) 2,5%                      2.3) 2,5%                      2.4) 74,5%

**Задачи №3–4**

3.1) 25%    3.2) 97,5%    4) Отвергаем на 10%; НЕ отвергаем на 1% и 5% уровнях значимости.

**Задача №5** $R = 0,67717$                        $\sigma = 0,00584$                        $[0,66572; 0,68862]$ **Задачи №6**6.1)  $E = 5713,00$  у.е.                       $\sigma = 90,30$  у.е.                      6.2) 5%                      6.3) 3944 шт.**Задача №7** $W = 0,2029$                        $R_{\text{опт}} = 9,694\%$                        $\sigma_{\text{опт}} = 4,368\%$                        $[1,13\%; 18,26\%]$ **Задача №8**

$D(X) = 164,8938$	$\sigma(X) = 12,8411$	$\text{Cov}(X; Y) = 96,7683$
$D(Y) = 122,6495$	$\sigma(Y) = 11,0747$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,6805$
$\beta_1 = 0,5869$	$\beta_0 = 12,9459$	
$\text{TSS} = 613,2475$	$\text{ESS} = 283,9435$	$\text{RSS} = 329,304$
$R^2 = 0,463$	$R^2_{\text{adj}} = 0,3288$	$F = 3,449$

Модель ЗНАЧИМА на 50% уровне значимости и НЕ Значима на 10%.

**Задача №9**9.1)                       $t_0 = 1,16$  не знач.                       $t_1 = 1,16$  не знач.  
                                  $t_2 = 0,6$  не знач.                       $t_3 = 0,6$  не знач.9.2)                       $Y = 120\,473$  руб.9.3)  $\Delta Y = -9\,917$                        $\sigma = 8\,586$                        $[-23998,0; 4164,0]$ **Задачи №10**10.1)  $\Delta \ln Y = 0,1487$                        $\sigma(\Delta \ln Y) = 0,172$                        $[-0,2951; 0,5925]$   
 $Y_2/Y_1 = 1,1603$  (Увеличилась на 16,03%)                       $[-25,55\%; 80,85\%]$ 10.2)  $\Delta \ln Y = -0,074$                        $\sigma(\Delta \ln Y) = 0,1101$                        $[-0,2898; 0,1418]$   
 $Y_2/Y_1 = 0,9287$  (Уменьшилась на 7,13%)                       $[-25,16\%; 15,23\%]$



**Задача №7**

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 13% и стандартным отклонением 5,5%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 6,5% и стандартным отклонением 3%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,141.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 99% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

**Задача №8**

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	2,7	7,3	16,7	19,4	22,6	29,8	16,417
Y	9,9	14,8	9,8	10,8	17,1	16,4	13,133
X <sup>2</sup>	7,29	53,29	278,89	376,36	510,76	888,04	352,438
Y <sup>2</sup>	98,01	219,04	96,04	116,64	292,41	268,96	181,850
XY	26,73	108,04	163,66	209,52	386,46	488,72	230,522

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

**Задача №9**

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 43782(\pm 37906) + 5752(\pm 4980) X_1(i) + 23208(\pm 7535) X_2(i) + 1444(\pm 1250) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Женщины без высшего образования 22 лет"?

9.3) Постройте 95% доверительный интервал для различия доходов "Женщины без высшего образования 22 лет" и "Женщины с высшим образованием 22 лет".

**Задача №10**

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 4,28(\pm 3,522) + 0,69(\pm 0,127) \ln X_1(i) + 0,006(\pm 0,011) X_2(i) + 0,108(\pm 0,067) X_3(i) + 0,081(\pm 0,026) X_4(i) + 0,019(\pm 0,076) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,75; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 15% и количество спален увеличилось на 1. Постройте 99% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом НЕ испортить «прекрасный вид». Постройте 95% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,6536$	$\sigma(X) = 0,4758$	$E(Y   X = 0) = 0,2038$
$E(Y) = 0,4854$	$\sigma(Y) = 0,4998$	$E(Y   X = 1) = 0,6346$
$E(XY) = 0,4148$	$\text{cov}(X; Y) = 0,0975$	$E(X   Y = 0) = 0,4640$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,4100$	$E(X   Y = 1) = 0,8546$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 25,969 часов.

2.1) 2,5%	2.2) 25%	2.3) 72,5%	2.4) 4,5%
-----------	----------	------------	-----------

**Задачи №3–4**

3.1) 5%	3.2) 25%	4) Отвергаем на всех уровнях значимости.
---------	----------	--

**Задача №5**

$R = 0,58975$	$\sigma = 0,00405$	$[0,57930; 0,60020]$
---------------	--------------------	----------------------

**Задачи №6**

6.1) $E = 16929,00$ у.е.	$\sigma = 251,90$ у.е.	6.2) 25%	6.3) 5361 шт.
--------------------------	------------------------	----------	---------------

**Задача №7**

$W = 0,1929$	$R_{\text{опт}} = 7,754\%$	$\sigma_{\text{опт}} = 2,777\%$	$[0,59\%; 14,92\%]$
--------------	----------------------------	---------------------------------	---------------------

**Задача №8**

$D(X) = 99,5041$	$\sigma(X) = 9,9752$	$\text{Cov}(X; Y) = 17,901$
$D(Y) = 11,2492$	$\sigma(Y) = 3,354$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,535$
$\beta_1 = 0,1799$	$\beta_0 = 10,1796$	
$\text{TSS} = 56,246$	$\text{ESS} = 16,1021$	$\text{RSS} = 40,1439$
$R^2 = 0,2863$	$R^2_{\text{adj}} = 0,1078$	$F = 1,6044$

Модель ЗНАЧИМА на 50% уровне значимости и НЕ Значима на 10%.

**Задача №9**

9.1)	$t_0 = 1,16$ не знач.	$t_1 = 1,16$ не знач.
	$t_2 = 3,08$ ***	$t_3 = 1,16$ не знач.

9.2)  $Y = 75\,550$  руб.

9.3) $\Delta Y = 23\,208$	$\sigma = 7\,535$	$[8439,4; 37976,6]$
---------------------------	-------------------	---------------------

**Задачи №10**

10.1) $\Delta \text{Ln} Y = 0,1024$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,027$	$[0,0327; 0,1721]$
-------------------------------------	--------------------------------------	--------------------

$Y_2/Y_1 = 1,1078$ (Увеличилась на 10,78%)		$[3,32\%; 18,78\%]$
--	--	---------------------

10.2) $\Delta \text{Ln} Y = 0,127$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,1013$	$[-0,0715; 0,3255]$
------------------------------------	---------------------------------------	---------------------

$Y_2/Y_1 = 1,1354$ (Увеличилась на 13,54%)		$[-6,9\%; 38,47\%]$
--	--	---------------------



## Тестовый Вариант № КР1-32 (2023/24)

(продолжение)

### Задача №7

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 10,9% и стандартным отклонением 5%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 7,3% и стандартным отклонением 4,2%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,616.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 95% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

### Задача №8

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	5,8	16,8	26,2	31,5	41,0	43,2	27,417
Y	3,3	5,4	4,2	10,4	17,0	9,7	8,333
X <sup>2</sup>	33,64	282,24	686,44	992,25	1681,00	1866,24	923,635
Y <sup>2</sup>	10,89	29,16	17,64	108,16	289,00	94,09	91,490
XY	19,14	90,72	110,04	327,60	697,00	419,04	277,257

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

### Задача №9

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 46364(\pm 40142) + 8582(\pm 7430) X_1(i) + 22224(\pm 9790) X_2(i) + 575(\pm 319) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Мужчины без высшего образования 52 лет"?

9.3) Постройте 99% доверительный интервал для различия доходов "Мужчины без высшего образования 52 лет" и "Женщины без высшего образования 52 лет".

### Задача №10

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 7,127(\pm 2,53) + 0,239(\pm 0,13) \ln X_1(i) + 0,006(\pm 0,007) X_2(i) + 0,068(\pm 0,033) X_3(i) + 0,017(\pm 0,121) X_4(i) + 0,014(\pm 0,085) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,655; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 28% и количество спален увеличилось на 3. Постройте 90% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом НЕ испортить «прекрасный вид». Постройте 95% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,5790$	$\sigma(X) = 0,4937$	$E(Y   X = 0) = 0,3938$
$E(Y) = 0,5806$	$\sigma(Y) = 0,4935$	$E(Y   X = 1) = 0,7164$
$E(XY) = 0,4148$	$\text{cov}(X; Y) = 0,0786$	$E(X   Y = 0) = 0,3915$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,3226$	$E(X   Y = 1) = 0,7144$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 110,309 часов.

2.1) 0,5%                      2.2) 75%                      2.3) 4,5%                      2.4) 72,5%

**Задачи №3–4**

3.1) 2,5%    3.2) 25%    4) Отвергаем на всех уровнях значимости.

**Задача №5** $R = 0,26243$                        $\sigma = 0,00233$                        $[0,25786; 0,26700]$ **Задачи №6**6.1)  $E = 11916,00$  у.е.     $\sigma = 393,85$  у.е.                      6.2) 97,5%                      6.3) 10250 шт.**Задача №7** $W = 0,2805$                        $R_{\text{опт}} = 8,310\%$                        $\sigma_{\text{опт}} = 4,040\%$                        $[0,39\%; 16,23\%]$ **Задача №8**

$D(X) = 206,3317$	$\sigma(X) = 14,3643$	$\text{Cov}(X; Y) = 58,5494$
$D(Y) = 26,4613$	$\sigma(Y) = 5,1441$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,7924$
$\beta_1 = 0,2838$	$\beta_0 = 0,5521$	
$TSS = 132,3065$	$ESS = 83,0709$	$RSS = 49,2356$
$R^2 = 0,6279$	$R^2_{\text{adj}} = 0,5348$	$F = 6,7488$

Модель ЗНАЧИМА на 10% уровне значимости и НЕ Значима на 5%.

**Задача №9**9.1)                       $t_0 = 1,15$  не знач.                       $t_1 = 1,16$  не знач.  
                                  $t_2 = 2,27$  \*\*                       $t_3 = 1,8$  \*9.2)                       $Y = 84\ 846$  руб.9.3)  $\Delta Y = -8\ 582$                        $\sigma = 7\ 430$                        $[-27751,4; 10587,4]$ **Задачи №10**10.1)  $\Delta \text{Ln}Y = 0,077$                        $\sigma(\Delta \text{Ln}Y) = 0,0485$                        $[-0,0025; 0,1565]$  $Y_2/Y_1 = 1,08$  (Увеличилась на 8%)                       $[-0,25\%; 16,94\%]$ 10.2)  $\Delta \text{Ln}Y = 0,082$                        $\sigma(\Delta \text{Ln}Y) = 0,0912$                        $[-0,0968; 0,2608]$  $Y_2/Y_1 = 1,0855$  (Увеличилась на 8,55%)                       $[-9,23\%; 29,8\%]$





**Задача №1**

Дано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  (табл.). Найдите: математические ожидания  $E(X)$ ,  $E(Y)$  и  $E(XY)$ ; стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$ , корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ ; условные математические ожидания  $E(Y | X = 0)$ ;  $E(Y | X = 1)$ ;  $E(X | Y = 0)$ ;  $E(X | Y = 1)$ .

	$Y = 0$	$Y = 1$	Всего
$X = 0$	0,2297	0,1723	0,4020
$X = 1$	0,1735	0,4245	0,5980
Всего	0,4032	0,5968	1,0000

**Задача №2**

Завод производит лампы со средней продолжительностью работы 1100 ч. и стандартным отклонением 1400 ч. Известно, что продолжительность работы имеет нормальное распределение. Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 1020 ламп. Найдите вероятность того, что:

- 2.1)  $X < 1213$  ч.
- 2.2)  $X > 1186$  ч.
- 2.3)  $1014$  ч.  $< X < 1028$  ч.
- 2.4)  $1071$  ч.  $< X < 1172$  ч.

**Задача №3**

В отделе технического контроля (ОТК) завода из задачи №2 проводится контроль выпущенной партии ламп. Тестируется нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 1100 ч. (стандарт)" против односторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп меньше 1100 ч. (брак)". Тест проводится следующим образом: Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 1020 ламп. Если  $X > 987$  ч., то нулевая гипотеза не отвергается.

- 3.1) Каков статистический размер этого теста?
- 3.2) Какова статистическая мощность рассмотренного теста, если нам известно, что, на самом деле, средняя продолжительность работы ламп не изменилась и равна 1100 ч., а стандартное отклонение составило 5386 ч.

**Задача №4**

В результате анализа получено, что средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 1020 ламп, выпущенных заводом из задачи №2, составила 1235 ч.

На каких стандартных уровнях значимости (1%, 5% и 10%) отвергается (на каких - не отвергается) нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 1100 ч." против двухсторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп НЕ равна 1100 ч." (Стандартное отклонение такое же, как и в задаче №2.)

**Задача №5**

Проводится опрос 6794 случайно выбранных потенциальных избирателей. 4118 респондентов ответили, что будут голосовать за "нашего" кандидата, а остальные 2676 – за его соперника. Пусть  $R$  – доля всех избирателей, которые собираются отдать "голос" за "нашего" кандидата.

- 5.1) Используя результаты опроса, оцените величину  $R$  и её стандартное отклонение.
- 5.2) Постройте 99% доверительный интервал для оценки величины  $R$ .

**Задача №6**

В течение года ураган может нанести повреждения дому. Повреждения происходят случайным образом. Пусть  $U$  (в у.е.) – размер повреждений в данном году. Пусть в 10% случаев  $U = 26700$  у.е., в остальных случаях  $U = 0$ .

- 6.1) Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение для среднего выборочного  $\bar{U}$  по выборке из 4220 домов (дома выбираются независимо).
- 6.2) Какова вероятность того, что  $\bar{U}$  больше 2988 у.е.
- 6.3) Чему должно быть равно  $n$  – количество домов в выборке, если вероятность того, что среднее выборочное  $\bar{U}$  меньше 2733 у.е. составила 75%?

**Задача №7**

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 20% и стандартным отклонением 12,4%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 4% и стандартным отклонением 10,2%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,258.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 99% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

**Задача №8**

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	5,6	13,1	14,6	21,3	31,9	36,4	20,483
Y	3,0	9,0	5,1	4,1	5,1	5,8	5,350
X <sup>2</sup>	31,36	171,61	213,16	453,69	1017,61	1324,96	535,398
Y <sup>2</sup>	9,00	81,00	26,01	16,81	26,01	33,64	32,078
XY	16,80	117,90	74,46	87,33	162,69	211,12	111,717

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

**Задача №9**

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 68049(\pm 22094) + 10099(\pm 4449) X_1(i) + 16102(\pm 26837) X_2(i) + 1246(\pm 1079) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Мужчины с высшим образованием 44 лет"?

9.3) Постройте 95% доверительный интервал для различия доходов "Мужчины с высшим образованием 44 лет" и "Мужчины с высшим образованием 38 лет".

**Задача №10**

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 10,738(\pm 5,283) + 0,752(\pm 0,407) \ln X_1(i) + 0,011(\pm 0,006) X_2(i) + 0,094(\pm 0,013) X_3(i) + 0,1(\pm 0,048) X_4(i) + 0,01(\pm 0,025) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,607; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 7% и количество спален уменьшилось на 2. Постройте 99% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом НЕ испортить «прекрасный вид». Постройте 95% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,5980$	$\sigma(X) = 0,4903$	$E(Y   X = 0) = 0,4286$
$E(Y) = 0,5968$	$\sigma(Y) = 0,4905$	$E(Y   X = 1) = 0,7099$
$E(XY) = 0,4245$	$\text{cov}(X; Y) = 0,0676$	$E(X   Y = 0) = 0,4303$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,2811$	$E(X   Y = 1) = 0,7113$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 43,836 часов.

2.1) 99,5%	2.2) 2,5%	2.3) 2,5%	2.4) 70%
------------	-----------	-----------	----------

**Задачи №3–4**

3.1) 0,5%	3.2) 25%	4) Отвергаем на всех уровнях значимости.
-----------	----------	--

**Задача №5**

$R = 0,60612$	$\sigma = 0,00593$	$[0,59082; 0,62142]$
---------------	--------------------	----------------------

**Задачи №6**

6.1) $E = 2670,00$ у.е.	$\sigma = 123,30$ у.е.	6.2) 0,5%	6.3) 7257 шт.
-------------------------	------------------------	-----------	---------------

**Задача №7**

$W = 0,3709$	$R_{\text{опт}} = 9,934\%$	$\sigma_{\text{опт}} = 8,807\%$	$[-12,79\%; 32,66\%]$
--------------	----------------------------	---------------------------------	-----------------------

**Задача №8**

$D(X) = 139,0137$	$\sigma(X) = 11,7904$	$\text{Cov}(X; Y) = 2,5595$
$D(Y) = 4,1466$	$\sigma(Y) = 2,0363$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,1066$
$\beta_1 = 0,0184$	$\beta_0 = 4,9731$	
$TSS = 20,733$	$ESS = 0,2356$	$RSS = 20,4974$
$R^2 = 0,0114$	$R^2_{\text{adj}} = -0,2358$	$F = 0,046$

Модель НЕ Значима на всех уровнях значимости.

**Задача №9**

9.1)	$t_0 = 3,08$ ***	$t_1 = 2,27$ **
	$t_2 = 0,6$ не знач.	$t_3 = 1,15$ не знач.
9.2)	$Y = 149\,074$ руб.	
9.3)	$\Delta Y = -7\,476$	$\sigma = 6\,474$
		$[-20165,0; 5213,0]$

**Задачи №10**

10.1) $\Delta \text{Ln}Y = 0,0289$	$\sigma(\Delta \text{Ln}Y) = 0,0224$	$[-0,0289; 0,0867]$
$Y_2/Y_1 = 1,0293$ (Увеличилась на 2,93%)		$[-2,85\%; 9,06\%]$
10.2) $\Delta \text{Ln}Y = 0,104$	$\sigma(\Delta \text{Ln}Y) = 0,0282$	$[0,0487; 0,1593]$
$Y_2/Y_1 = 1,1096$ (Увеличилась на 10,96%)		$[4,99\%; 17,27\%]$



**Задача №7**

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 18,2% и стандартным отклонением 4,9%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 4% и стандартным отклонением 3,2%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,582.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 90% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

**Задача №8**

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	3,3	7,0	9,0	17,0	26,3	32,8	15,900
Y	10,3	31,7	29,3	24,2	17,7	25,9	23,183
X <sup>2</sup>	10,89	49,00	81,00	289,00	691,69	1075,84	366,237
Y <sup>2</sup>	106,09	1004,89	858,49	585,64	313,29	670,81	589,868
XY	33,99	221,90	263,70	411,40	465,51	849,52	374,337

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

**Задача №9**

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 53357(\pm 46197) + 5793(\pm 9655) X_1(i) + 18902(\pm 6137) X_2(i) + 736(\pm 637) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Мужчины с высшим образованием 32 лет"?

9.3) Постройте 90% доверительный интервал для различия доходов "Мужчины с высшим образованием 32 лет" и "Женщины с высшим образованием 32 лет".

**Задача №10**

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 4,48(\pm 3,799) + 0,716(\pm 0,11) \ln X_1(i) + 0,008(\pm 0,008) X_2(i) + 0,029(\pm 0,021) X_3(i) + 0,06(\pm 0,034) X_4(i) + 0,009(\pm 0,034) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,74; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 25% и количество спален увеличилось на 1. Постройте 90% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом испортить «прекрасный вид». Постройте 95% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,9282$	$\sigma(X) = 0,2582$	$E(Y   X = 0) = 0,2758$
$E(Y) = 0,6695$	$\sigma(Y) = 0,4704$	$E(Y   X = 1) = 0,7000$
$E(XY) = 0,6497$	$\text{cov}(X; Y) = 0,0283$	$E(X   Y = 0) = 0,8427$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,2330$	$E(X   Y = 1) = 0,9704$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 33,595 часов.

2.1) 5%	2.2) 97,5%	2.3) 2,5%	2.4) 94,5%
---------	------------	-----------	------------

**Задачи №3-4**

3.1) 0,5%    3.2) 99,5%    4) Отвергаем на 5% и 10%; НЕ отвергаем на 1% уровне значимости.

**Задача №5**

$R = 0,57268$	$\sigma = 0,00363$	$[0,56673; 0,57863]$
---------------	--------------------	----------------------

**Задачи №6**

6.1) $E = 4067,00$ у.е.	$\sigma = 179,90$ у.е.	6.2) 97,5%	6.3) 9688 шт.
-------------------------	------------------------	------------	---------------

**Задача №7**

$W = 0,0696$	$R_{\text{опт}} = 4,988\%$	$\sigma_{\text{опт}} = 3,188\%$	$[-0,24\%; 10,22\%]$
--------------	----------------------------	---------------------------------	----------------------

**Задача №8**

$D(X) = 136,1124$	$\sigma(X) = 11,6667$	$\text{Cov}(X; Y) = 6,8728$
$D(Y) = 62,8998$	$\sigma(Y) = 7,9309$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,0743$
$\beta_1 = 0,0505$	$\beta_0 = 22,3801$	
$\text{TSS} = 314,499$	$\text{ESS} = 1,7352$	$\text{RSS} = 312,7638$
$R^2 = 0,0055$	$R^2_{\text{adj}} = -0,2431$	$F = 0,0222$

Модель НЕ Значима на всех уровнях значимости.

**Задача №9**

9.1)	$t_0 = 1,15$ не знач.	$t_1 = 0,6$ не знач.
	$t_2 = 3,08$ ***	$t_3 = 1,16$ не знач.

9.2)  $Y = 101\ 604$  руб.

9.3) $\Delta Y = -5\ 793$	$\sigma = 9\ 655$	$[-21627,2; 10041,2]$
---------------------------	-------------------	-----------------------

**Задачи №10**

10.1) $\Delta \text{Ln} Y = 0,1678$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,0309$	$[0,1171; 0,2185]$
$Y_2/Y_1 = 1,1827$ (Увеличилась на 18,27%)		$[12,42\%; 24,42\%]$
10.2) $\Delta \text{Ln} Y = -0,031$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,04$	$[-0,1094; 0,0474]$
$Y_2/Y_1 = 0,9695$ (Уменьшилась на 3,05%)		$[-10,36\%; 4,85\%]$



**Задача №1**

Дано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  (табл.). Найдите: математические ожидания  $E(X)$ ,  $E(Y)$  и  $E(XY)$ ; стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$ , корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ ; условные математические ожидания  $E(Y | X = 0)$ ;  $E(Y | X = 1)$ ;  $E(X | Y = 0)$ ;  $E(X | Y = 1)$ .

	$Y = 0$	$Y = 1$	Всего
$X = 0$	0,1485	0,1239	0,2724
$X = 1$	0,2468	0,4808	0,7276
Всего	0,3953	0,6047	1,0000

**Задача №2**

Завод производит лампы со средней продолжительностью работы 3740 ч. и стандартным отклонением 1780 ч. Известно, что продолжительность работы имеет нормальное распределение. Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 670 ламп. Найдите вероятность того, что:

- 2.1)  $X < 3853$  ч.
- 2.2)  $X > 3917$  ч.
- 2.3)  $3563$  ч.  $< X < 3694$  ч.
- 2.4)  $3605$  ч.  $< X < 3853$  ч.

**Задача №3**

В отделе технического контроля (ОТК) завода из задачи №2 проводится контроль выпущенной партии ламп. Тестируется нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 3740 ч. (стандарт)" против односторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп меньше 3740 ч. (брак)". Тест проводится следующим образом: Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 670 ламп. Если  $X > 3627$  ч., то нулевая гипотеза не отвергается.

- 3.1) Каков статистический размер этого теста?
- 3.2) Какова статистическая мощность рассмотренного теста, если нам известно, что, на самом деле, средняя продолжительность работы ламп составила 3492 ч., а стандартное отклонение не изменилось и равно 1780 ч.

**Задача №4**

В результате анализа получено, что средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 670 ламп, выпущенных заводом из задачи №2, составила 3584 ч.

На каких стандартных уровнях значимости (1%, 5% и 10%) отвергается (на каких - не отвергается) нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 3740 ч." против двухсторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп НЕ равна 3740 ч." (Стандартное отклонение такое же, как и в задаче №2.)

**Задача №5**

Проводится опрос 27741 случайно выбранных потенциальных избирателей. 9821 респондентов ответили, что будут голосовать за "нашего" кандидата, а остальные 17920 – за его соперника. Пусть  $R$  – доля всех избирателей, которые собираются отдать "голос" за "нашего" кандидата.

- 5.1) Используя результаты опроса, оцените величину  $R$  и её стандартное отклонение.
- 5.2) Постройте 95% доверительный интервал для оценки величины  $R$ .

**Задача №6**

В течение года ураган может нанести повреждения дому. Повреждения происходят случайным образом. Пусть  $U$  (в у.е.) – размер повреждений в данном году. Пусть в 39% случаев  $U = 68700$  у.е., в остальных случаях  $U = 0$ .

- 6.1) Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение для среднего выборочного  $\bar{U}$  по выборке из 9550 домов (дома выбираются независимо).
- 6.2) Какова вероятность того, что  $\bar{U}$  больше 27355 у.е.
- 6.3) Чему должно быть равно  $n$  – количество домов в выборке, если вероятность того, что среднее выборочное  $\bar{U}$  меньше 27216 у.е. составила 75%?

**Задача №7**

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 8% и стандартным отклонением 4,7%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 4,3% и стандартным отклонением 4%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,129.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 99% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

**Задача №8**

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	1,8	3,7	10,1	20,5	30,6	33,2	16,650
Y	5,0	3,6	3,1	4,6	6,5	6,1	4,817
X <sup>2</sup>	3,24	13,69	102,01	420,25	936,36	1102,24	429,632
Y <sup>2</sup>	25,00	12,96	9,61	21,16	42,25	37,21	24,698
XY	9,00	13,32	31,31	94,30	198,90	202,52	91,558

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

**Задача №9**

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 51955(\pm 22888) + 6236(\pm 2025) X_1(i) + 21410(\pm 11894) X_2(i) + 1089(\pm 605) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Женщины без высшего образования 47 лет"?

9.3) Постройте 99% доверительный интервал для различия доходов "Женщины без высшего образования 47 лет" и "Женщины с высшим образованием 47 лет".

**Задача №10**

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 7,817(\pm 2,353) + 0,167(\pm 0,419) \ln X_1(i) + 0,012(\pm 0,009) X_2(i) + 0,072(\pm 0,033) X_3(i) + 0,118(\pm 0,04) X_4(i) + 0,024(\pm 0,046) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,764; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 35% и количество спален уменьшилось на 1. Постройте 99% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом испортить «прекрасный вид». Постройте 95% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.



**Задача №1**

$E(X) = 0,7276$	$\sigma(X) = 0,4452$	$E(Y   X = 0) = 0,4548$
$E(Y) = 0,6047$	$\sigma(Y) = 0,4889$	$E(Y   X = 1) = 0,6608$
$E(XY) = 0,4808$	$\text{cov}(X; Y) = 0,0408$	$E(X   Y = 0) = 0,6243$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,1874$	$E(X   Y = 1) = 0,7951$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 68,767 часов.

2.1) 95%	2.2) 0,5%	2.3) 24,5%	2.4) 92,5%
----------	-----------	------------	------------

**Задачи №3–4**

3.1) 5%	3.2) 97,5%	4) Отвергаем на 5% и 10%; НЕ отвергаем на 1% уровне значимости.
---------	------------	---

**Задача №5**

$R = 0,35402$	$\sigma = 0,00287$	$[0,34839; 0,35965]$
---------------	--------------------	----------------------

**Задачи №6**

6.1) $E = 26793,00$ у.е.	$\sigma = 342,89$ у.е.	6.2) 5%	6.3) 2817 шт.
--------------------------	------------------------	---------	---------------

**Задача №7**

$W = 0,4084$	$R_{\text{опт}} = 5,811\%$	$\sigma_{\text{опт}} = 3,234\%$	$[-2,53\%; 14,15\%]$
--------------	----------------------------	---------------------------------	----------------------

**Задача №8**

$D(X) = 182,8914$	$\sigma(X) = 13,5237$	$\text{Cov}(X; Y) = 13,6259$
$D(Y) = 1,7934$	$\sigma(Y) = 1,3392$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,7524$
$\beta_1 = 0,0745$	$\beta_0 = 3,5766$	
$\text{TSS} = 8,967$	$\text{ESS} = 5,0758$	$\text{RSS} = 3,8912$
$R^2 = 0,5661$	$R^2_{\text{adj}} = 0,4576$	$F = 5,2177$

Модель ЗНАЧИМА на 10% уровне значимости и НЕ Значима на 5%.

**Задача №9**

9.1)	$t_0 = 2,27$ **	$t_1 = 3,08$ ***
	$t_2 = 1,8$ *	$t_3 = 1,8$ *

9.2)	$Y = 103\,138$ руб.
------	---------------------

9.3) $\Delta Y = 21\,410$	$\sigma = 11\,894$	$[-9276,5; 52096,5]$
---------------------------	--------------------	----------------------

**Задачи №10**

10.1) $\Delta \ln Y = 0,0381$	$\sigma(\Delta \ln Y) = 0,119$	$[-0,2689; 0,3451]$
$Y_2/Y_1 = 1,0388$ (Увеличилась на 3,88%)		$[-23,58\%; 41,21\%]$
10.2) $\Delta \ln Y = -0,046$	$\sigma(\Delta \ln Y) = 0,0519$	$[-0,1477; 0,0557]$
$Y_2/Y_1 = 0,955$ (Уменьшилась на 4,5%)		$[-13,73\%; 5,73\%]$



**Задача №1**

Дано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  (табл.). Найдите: математические ожидания  $E(X)$ ,  $E(Y)$  и  $E(XY)$ ; стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$ , корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ ; условные математические ожидания  $E(Y | X = 0)$ ;  $E(Y | X = 1)$ ;  $E(X | Y = 0)$ ;  $E(X | Y = 1)$ .

	$Y = 0$	$Y = 1$	Всего
$X = 0$	0,1872	0,1821	0,3693
$X = 1$	0,0557	0,5750	0,6307
Всего	0,2429	0,7571	1,0000

**Задача №2**

Завод производит лампы со средней продолжительностью работы 2660 ч. и стандартным отклонением 1390 ч. Известно, что продолжительность работы имеет нормальное распределение. Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 220 ламп. Найдите вероятность того, что:

- 2.1)  $X < 2723$  ч.
- 2.2)  $X > 2597$  ч.
- 2.3)  $2418$  ч.  $< X < 2476$  ч.
- 2.4)  $2597$  ч.  $< X < 2814$  ч.

**Задача №3**

В отделе технического контроля (ОТК) завода из задачи №2 проводится контроль выпущенной партии ламп. Тестируется нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 2660 ч. (стандарт)" против односторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп меньше 2660 ч. (брак)". Тест проводится следующим образом: Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 220 ламп. Если  $X > 2506$  ч., то нулевая гипотеза не отвергается.

- 3.1) Каков статистический размер этого теста?
- 3.2) Какова статистическая мощность рассмотренного теста, если нам известно, что, на самом деле, средняя продолжительность работы ламп не изменилась и равна 2660 ч., а стандартное отклонение составило 3409 ч.

**Задача №4**

В результате анализа получено, что средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 220 ламп, выпущенных заводом из задачи №2, составила 2491 ч.

На каких стандартных уровнях значимости (1%, 5% и 10%) отвергается (на каких - не отвергается) нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 2660 ч." против двухсторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп НЕ равна 2660 ч." (Стандартное отклонение такое же, как и в задаче №2.)

**Задача №5**

Проводится опрос 22023 случайно выбранных потенциальных избирателей. 11481 респондентов ответили, что будут голосовать за "нашего" кандидата, а остальные 10542 – за его соперника. Пусть  $R$  – доля всех избирателей, которые собираются отдать "голос" за "нашего" кандидата.

- 5.1) Используя результаты опроса, оцените величину  $R$  и её стандартное отклонение.
- 5.2) Постройте 90% доверительный интервал для оценки величины  $R$ .

**Задача №6**

В течение года ураган может нанести повреждения дому. Повреждения происходят случайным образом. Пусть  $U$  (в у.е.) – размер повреждений в данном году. Пусть в 33% случаев  $U = 6900$  у.е., в остальных случаях  $U = 0$ .

- 6.1) Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение для среднего выборочного  $\bar{U}$  по выборке из 9650 домов (дома выбираются независимо).
- 6.2) Какова вероятность того, что  $\bar{U}$  больше 2212 у.е.
- 6.3) Чему должно быть равно  $n$  – количество домов в выборке, если вероятность того, что среднее выборочное  $\bar{U}$  меньше 2185 у.е. составила 5%?

**Задача №7**

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 17,1% и стандартным отклонением 10,2%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 10,4% и стандартным отклонением 6,3%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,139.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 95% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

**Задача №8**

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	1,7	6,4	15,8	23,1	29,1	30,5	17,767
Y	6,0	20,8	54,7	58,4	50,9	33,8	37,433
X <sup>2</sup>	2,89	40,96	249,64	533,61	846,81	930,25	434,027
Y <sup>2</sup>	36,00	432,64	2992,09	3410,56	2590,81	1142,44	1767,423
XY	10,20	133,12	864,26	1349,04	1481,19	1030,90	811,452

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

**Задача №9**

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 40323(\pm 34912) + 8212(\pm 13687) X_1(i) + 20054(\pm 8834) X_2(i) + 974(\pm 1623) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Мужчины с высшим образованием 23 лет"?

9.3) Постройте 90% доверительный интервал для различия доходов "Мужчины с высшим образованием 23 лет" и "Женщины с высшим образованием 23 лет".

**Задача №10**

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 10,014(\pm 3,505) + 0,341(\pm 0,126) \ln X_1(i) + 0,013(\pm 0,009) X_2(i) + 0,071(\pm 0,109) X_3(i) + 0,053(\pm 0,086) X_4(i) + 0,011(\pm 0,089) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,125; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 10% и количество спален увеличилось на 1. Постройте 99% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом НЕ испортить «прекрасный вид». Постройте 95% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,6307$	$\sigma(X) = 0,4826$	$E(Y   X = 0) = 0,4931$
$E(Y) = 0,7571$	$\sigma(Y) = 0,4288$	$E(Y   X = 1) = 0,9117$
$E(XY) = 0,5750$	$\text{cov}(X; Y) = 0,0975$	$E(X   Y = 0) = 0,2293$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,4712$	$E(X   Y = 1) = 0,7595$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 93,714 часов.

2.1) 75%                      2.2) 75%                      2.3) 2%                      2.4) 70%

**Задачи №3–4**

3.1) 5%                      3.2) 25%                      4) Отверяем на 10%; НЕ отвергаем на 1% и 5% уровнях значимости.

**Задача №5**R = 0,52132                       $\sigma = 0,00337$                       [0,51579; 0,52685]**Задачи №6**6.1) E = 2277,00 у.е.                       $\sigma = 33,03$  у.е.                      6.2) 97,5%                      6.3) 3346 шт.**Задача №7**W = 0,2444                       $R_{\text{опт}} = 12,037\%$                        $\sigma_{\text{опт}} = 5,672\%$                       [0,92%; 23,15%]**Задача №8**

$D(X) = 142,0329$	$\sigma(X) = 11,9178$	$\text{Cov}(X; Y) = 175,6559$
$D(Y) = 439,4322$	$\sigma(Y) = 20,9626$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,7031$
$\beta_1 = 1,2367$	$\beta_0 = 15,4606$	
TSS = 2 197,161	ESS = 1 086,1918	RSS = 1 110,9692
$R^2 = 0,4944$	$R^2_{\text{adj}} = 0,368$	F = 3,9108

Модель ЗНАЧИМА на 50% уровне значимости и НЕ Значима на 10%.

**Задача №9**9.1)                       $t_0 = 1,15$  не знач.                       $t_1 = 0,6$  не знач.  
                                  $t_2 = 2,27$  \*\*                       $t_3 = 0,6$  не знач.

9.2)                      Y = 90 991 руб.

9.3)  $\Delta Y = -8 212$                        $\sigma = 13 687$                       [-30658,7; 14234,7]**Задачи №10**10.1)  $\Delta \ln Y = 0,0455$                        $\sigma(\Delta \ln Y) = 0,0159$                       [0,0045; 0,0865] $Y_2/Y_1 = 1,0466$  (Увеличилась на 4,66%)                      [0,45%; 9,04%]10.2)  $\Delta \ln Y = 0,082$                        $\sigma(\Delta \ln Y) = 0,1407$                       [-0,1938; 0,3578] $Y_2/Y_1 = 1,0855$  (Увеличилась на 8,55%)                      [-17,62%; 43,02%]



**Задача №7**

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 12,1% и стандартным отклонением 4,8%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 8,7% и стандартным отклонением 4%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,265.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 99% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

**Задача №8**

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	3,3	5,1	15,8	21,3	25,2	31,6	17,050
Y	4,5	15,6	12,9	22,1	31,3	23,0	18,233
X <sup>2</sup>	10,89	26,01	249,64	453,69	635,04	998,56	395,638
Y <sup>2</sup>	20,25	243,36	166,41	488,41	979,69	529,00	404,520
XY	14,85	79,56	203,82	470,73	788,76	726,80	380,753

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

**Задача №9**

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 32741(\pm 18189) + 14418(\pm 24030) X_1(i) + 15071(\pm 8373) X_2(i) + 708(\pm 393) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Женщины без высшего образования 32 лет"?

9.3) Постройте 95% доверительный интервал для различия доходов "Женщины без высшего образования 32 лет" и "Мужчины без высшего образования 32 лет".

**Задача №10**

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 5,164(\pm 2,257) + 0,567(\pm 0,376) \ln X_1(i) + 0,008(\pm 0,012) X_2(i) + 0,025(\pm 0,099) X_3(i) + 0,118(\pm 0,068) X_4(i) + 0,012(\pm 0,012) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,38; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 2% и количество спален уменьшилось на 1. Постройте 90% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом НЕ испортить «прекрасный вид». Постройте 95% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,7236$	$\sigma(X) = 0,4472$	$E(Y   X = 0) = 0,1415$
$E(Y) = 0,4702$	$\sigma(Y) = 0,4991$	$E(Y   X = 1) = 0,5958$
$E(XY) = 0,4311$	$\text{cov}(X; Y) = 0,0909$	$E(X   Y = 0) = 0,5521$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,4073$	$E(X   Y = 1) = 0,9168$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 123,522 часов.

2.1) 25%                      2.2) 99,5%                      2.3) 72,5%                      2.4) 4,5%

**Задачи №3–4**

3.1) 5%                      3.2) 25%                      4) НЕ отвергаем на всех уровнях значимости.

**Задача №5**R = 0,60868                       $\sigma = 0,00389$                       [0,60106; 0,61630]**Задачи №6**6.1) E = 6902,00 у.е.                       $\sigma = 120,67$  у.е.                      6.2) 0,5%                      6.3) 2732 шт.**Задача №7**W = 0,3780                       $R_{\text{опт}} = 9,985\%$                        $\sigma_{\text{опт}} = 3,446\%$                       [1,09%; 18,88%]**Задача №8**

$D(X) = 125,9226$	$\sigma(X) = 11,2215$	$\text{Cov}(X; Y) = 83,8564$
$D(Y) = 86,4933$	$\sigma(Y) = 9,3002$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,8035$
$\beta_1 = 0,6659$	$\beta_0 = 6,8794$	
TSS = 432,4665	ESS = 279,215	RSS = 153,2515
$R^2 = 0,6456$	$R^2_{\text{adj}} = 0,557$	F = 7,2878

Модель ЗНАЧИМА на 10% уровне значимости и НЕ Значима на 5%.

**Задача №9**9.1)  $t_0 = 1,8^*$                        $t_1 = 0,6$  не знач.  
 $t_2 = 1,8^*$                        $t_3 = 1,8^*$ 

9.2) Y = 55 397 руб.

9.3)  $\Delta Y = 14 418$                        $\sigma = 24 030$                       [-32680,8; 61516,8]**Задачи №10**10.1)  $\Delta \ln Y = 0,0032$                        $\sigma(\Delta \ln Y) = 0,0115$                       [-0,0157; 0,0221] $Y_2/Y_1 = 1,0032$  (Увеличилась на 0,32%)                      [-1,56%; 2,23%]10.2)  $\Delta \ln Y = 0,037$                        $\sigma(\Delta \ln Y) = 0,0997$                       [-0,1584; 0,2324] $Y_2/Y_1 = 1,0377$  (Увеличилась на 3,77%)                      [-14,65%; 26,16%]

**Задача №1**

Дано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  (табл.). Найдите: математические ожидания  $E(X)$ ,  $E(Y)$  и  $E(XY)$ ; стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$ , корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ ; условные математические ожидания  $E(Y | X = 0)$ ;  $E(Y | X = 1)$ ;  $E(X | Y = 0)$ ;  $E(X | Y = 1)$ .

	$Y = 0$	$Y = 1$	Всего
$X = 0$	0,0293	0,1172	0,1465
$X = 1$	0,2149	0,6386	0,8535
Всего	0,2442	0,7558	1,0000

**Задача №2**

Завод производит лампы со средней продолжительностью работы 6580 ч. и стандартным отклонением 1950 ч. Известно, что продолжительность работы имеет нормальное распределение. Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 460 ламп. Найдите вероятность того, что:

- 2.1)  $X < 6815$  ч.
- 2.2)  $X > 6519$  ч.
- 2.3)  $6345$  ч.  $< X < 6402$  ч.
- 2.4)  $6519$  ч.  $< X < 6729$  ч.

**Задача №3**

В отделе технического контроля (ОТК) завода из задачи №2 проводится контроль выпущенной партии ламп. Тестируется нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 6580 ч. (стандарт)" против односторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп меньше 6580 ч. (брак)". Тест проводится следующим образом: Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 460 ламп. Если  $X > 6431$  ч., то нулевая гипотеза не отвергается.

- 3.1) Каков статистический размер этого теста?
- 3.2) Какова статистическая мощность рассмотренного теста, если нам известно, что, на самом деле, средняя продолжительность работы ламп составила 6253 ч., а стандартное отклонение не изменилось и равно 1950 ч.

**Задача №4**

В результате анализа получено, что средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 460 ламп, выпущенных заводом из задачи №2, составила 6685 ч.

На каких стандартных уровнях значимости (1%, 5% и 10%) отвергается (на каких - не отвергается) нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 6580 ч." против двухсторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп НЕ равна 6580 ч." (Стандартное отклонение такое же, как и в задаче №2.)

**Задача №5**

Проводится опрос 33663 случайно выбранных потенциальных избирателей. 14483 респондентов ответили, что будут голосовать за "нашего" кандидата, а остальные 19180 – за его соперника. Пусть  $R$  – доля всех избирателей, которые собираются отдать "голос" за "нашего" кандидата.

- 5.1) Используя результаты опроса, оцените величину  $R$  и её стандартное отклонение.
- 5.2) Постройте 90% доверительный интервал для оценки величины  $R$ .

**Задача №6**

В течение года ураган может нанести повреждения дому. Повреждения происходят случайным образом. Пусть  $U$  (в у.е.) – размер повреждений в данном году. Пусть в 15% случаев  $U = 5500$  у.е., в остальных случаях  $U = 0$ .

- 6.1) Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение для среднего выборочного  $\bar{U}$  по выборке из 6490 домов (дома выбираются независимо).
- 6.2) Какова вероятность того, что  $\bar{U}$  больше 809 у.е.
- 6.3) Чему должно быть равно  $n$  – количество домов в выборке, если вероятность того, что среднее выборочное  $\bar{U}$  меньше 880 у.е. составила 99,5%?



**Задача №7**

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 19,6% и стандартным отклонением 8,5%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 8,4% и стандартным отклонением 6,6%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,703.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 90% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

**Задача №8**

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	6,2	7,6	12,1	16,9	20,6	29,8	15,533
Y	4,2	10,8	16,7	16,1	11,0	10,5	11,550
X <sup>2</sup>	38,44	57,76	146,41	285,61	424,36	888,04	306,770
Y <sup>2</sup>	17,64	116,64	278,89	259,21	121,00	110,25	150,605
XY	26,04	82,08	202,07	272,09	226,60	312,90	186,963

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

**Задача №9**

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 55394(\pm 47960) + 13211(\pm 5820) X_1(i) + 24875(\pm 41458) X_2(i) + 944(\pm 524) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Мужчины с высшим образованием 39 лет"?

9.3) Постройте 99% доверительный интервал для различия доходов "Мужчины с высшим образованием 39 лет" и "Мужчины с высшим образованием 52 лет".

**Задача №10**

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 4,597(\pm 1,503) + 0,27(\pm 0,503) \ln X_1(i) + 0,01(\pm 0,01) X_2(i) + 0,05(\pm 0,044) X_3(i) + 0,018(\pm 0,108) X_4(i) + 0,014(\pm 0,075) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,659; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 9% и количество спален уменьшилось на 1. Постройте 90% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом НЕ испортить «прекрасный вид». Постройте 99% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,8535$	$\sigma(X) = 0,3536$	$E(Y   X = 0) = 0,8000$
$E(Y) = 0,7558$	$\sigma(Y) = 0,4296$	$E(Y   X = 1) = 0,7482$
$E(XY) = 0,6386$	$\text{cov}(X; Y) = -0,0065$	$E(X   Y = 0) = 0,8800$
	$\text{corr}(X; Y) = -0,0428$	$E(X   Y = 1) = 0,8449$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 90,919 часов.

2.1) 99,5%                      2.2) 75%                      2.3) 2%                      2.4) 70%

**Задачи №3–4**

3.1) 5%                      3.2) 97,5%                      4) НЕ отвергаем на всех уровнях значимости.

**Задача №5**R = 0,43023                       $\sigma = 0,00270$                       [0,42580; 0,43466]**Задачи №6**6.1) E = 825,00 у.е.                       $\sigma = 24,38$  у.е.                      6.2) 75%                      6.3) 8487 шт.**Задача №7**W = 0,1116                       $R_{\text{опт}} = 9,650\%$                        $\sigma_{\text{опт}} = 6,565\%$                       [-1,12%; 20,42%]**Задача №8**

$D(X) = 78,5951$	$\sigma(X) = 8,8654$	$\text{Cov}(X; Y) = 9,0682$
$D(Y) = 20,643$	$\sigma(Y) = 4,5435$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,2251$
$\beta_1 = 0,1154$	$\beta_0 = 9,7575$	
TSS = 103,215	ESS = 5,2314	RSS = 97,9836
$R^2 = 0,0507$	$R^2_{\text{adj}} = -0,1866$	F = 0,2136

Модель НЕ Значима на всех уровнях значимости.

**Задача №9**9.1)  $t_0 = 1,16$  не знач.                       $t_1 = 2,27$  \*\*  
 $t_2 = 0,6$  не знач.                       $t_3 = 1,8$  \*

9.2) Y = 130 296 руб.

9.3)  $\Delta Y = 12\ 272$                        $\sigma = 6\ 812$                       [-5303,0; 29847,0]**Задачи №10**10.1)  $\Delta \ln Y = 0,0133$                        $\sigma(\Delta \ln Y) = 0,0375$                       [-0,0482; 0,0748] $Y_2/Y_1 = 1,0134$  (Увеличилась на 1,34%)                      [-4,71%; 7,77%]10.2)  $\Delta \ln Y = 0,064$                        $\sigma(\Delta \ln Y) = 0,087$                       [-0,1605; 0,2885] $Y_2/Y_1 = 1,0661$  (Увеличилась на 6,61%)                      [-14,83%; 33,44%]

**Задача №1**

Дано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  (табл.). Найдите: математические ожидания  $E(X)$ ,  $E(Y)$  и  $E(XY)$ ; стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$ , корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ ; условные математические ожидания  $E(Y | X = 0)$ ;  $E(Y | X = 1)$ ;  $E(X | Y = 0)$ ;  $E(X | Y = 1)$ .

	$Y = 0$	$Y = 1$	Всего
$X = 0$	0,1832	0,2141	0,3973
$X = 1$	0,0692	0,5335	0,6027
Всего	0,2524	0,7476	1,0000

**Задача №2**

Завод производит лампы со средней продолжительностью работы 6860 ч. и стандартным отклонением 1880 ч. Известно, что продолжительность работы имеет нормальное распределение. Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 660 ламп. Найдите вероятность того, что:

- 2.1)  $X < 6909$  ч.
- 2.2)  $X > 6717$  ч.
- 2.3)  $6740$  ч.  $< X < 7049$  ч.
- 2.4)  $6909$  ч.  $< X < 6980$  ч.

**Задача №3**

В отделе технического контроля (ОТК) завода из задачи №2 проводится контроль выпущенной партии ламп. Тестируется нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 6860 ч. (стандарт)" против односторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп меньше 6860 ч. (брак)". Тест проводится следующим образом: Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 660 ламп. Если  $X > 6671$  ч., то нулевая гипотеза не отвергается.

- 3.1) Каков статистический размер этого теста?
- 3.2) Какова статистическая мощность рассмотренного теста, если нам известно, что, на самом деле, средняя продолжительность работы ламп не изменилась и равна 6860 ч., а стандартное отклонение составило 2961 ч.

**Задача №4**

В результате анализа получено, что средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 660 ламп, выпущенных заводом из задачи №2, составила 6694 ч.

На каких стандартных уровнях значимости (1%, 5% и 10%) отвергается (на каких - не отвергается) нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 6860 ч." против двухсторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп НЕ равна 6860 ч." (Стандартное отклонение такое же, как и в задаче №2.)

**Задача №5**

Проводится опрос 7059 случайно выбранных потенциальных избирателей. 1894 респондентов ответили, что будут голосовать за "нашего" кандидата, а остальные 5165 – за его соперника. Пусть  $R$  – доля всех избирателей, которые собираются отдать "голос" за "нашего" кандидата.

- 5.1) Используя результаты опроса, оцените величину  $R$  и её стандартное отклонение.
- 5.2) Постройте 95% доверительный интервал для оценки величины  $R$ .

**Задача №6**

В течение года ураган может нанести повреждения дому. Повреждения происходят случайным образом. Пусть  $U$  (в у.е.) – размер повреждений в данном году. Пусть в 10% случаев  $U = 33100$  у.е., в остальных случаях  $U = 0$ .

- 6.1) Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение для среднего выборочного  $\bar{U}$  по выборке из 7790 домов (дома выбираются независимо).
- 6.2) Какова вероятность того, что  $\bar{U}$  больше 3089 у.е.
- 6.3) Чему должно быть равно  $n$  – количество домов в выборке, если вероятность того, что среднее выборочное  $\bar{U}$  меньше 3460 у.е. составила 95%?

**Задача №7**

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 19,1% и стандартным отклонением 9,9%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 11,6% и стандартным отклонением 5,5%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,256.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 95% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

**Задача №8**

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	0,9	4,9	6,0	11,2	12,3	13,4	8,117
Y	4,3	6,7	5,2	7,9	11,9	8,0	7,333
X <sup>2</sup>	0,81	24,01	36,00	125,44	151,29	179,56	86,185
Y <sup>2</sup>	18,49	44,89	27,04	62,41	141,61	64,00	59,740
XY	3,87	32,83	31,20	88,48	146,37	107,20	68,325

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

**Задача №9**

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 69744(\pm 38747) + 7895(\pm 3478) X_1(i) + 15374(\pm 13311) X_2(i) + 991(\pm 437) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Мужчины без высшего образования 32 лет"?

9.3) Постройте 90% доверительный интервал для различия доходов "Мужчины без высшего образования 32 лет" и "Женщины без высшего образования 32 лет".

**Задача №10**

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 8,438(\pm 6,708) + 0,527(\pm 0,432) \ln X_1(i) + 0,007(\pm 0,006) X_2(i) + 0,043(\pm 0,052) X_3(i) + 0,017(\pm 0,11) X_4(i) + 0,012(\pm 0,036) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,759; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 40% и количество спален уменьшилось на 3. Постройте 95% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом испортить «прекрасный вид». Постройте 99% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,6027$	$\sigma(X) = 0,4893$	$E(Y   X = 0) = 0,5389$
$E(Y) = 0,7476$	$\sigma(Y) = 0,4344$	$E(Y   X = 1) = 0,8852$
$E(XY) = 0,5335$	$\text{cov}(X; Y) = 0,0829$	$E(X   Y = 0) = 0,2742$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,3900$	$E(X   Y = 1) = 0,7136$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 73,179 часов.

2.1) 75%                      2.2) 97,5%                      2.3) 94,5%                      2.4) 20%

**Задачи №3–4**

3.1) 0,5%    3.2) 5%    4) Отвергаем на 5% и 10%; НЕ отвергаем на 1% уровне значимости.

**Задача №5**R = 0,26831                       $\sigma = 0,00527$                       [0,25798; 0,27864]**Задачи №6**6.1) E = 3310,00 у.е.                       $\sigma = 112,51$  у.е.                      6.2) 97,5%                      6.3) 11788 шт.**Задача №7**W = 0,1625                       $R_{\text{опт}} = 12,819\%$                        $\sigma_{\text{опт}} = 5,254\%$                       [2,52%; 23,12%]**Задача №8**

$D(X) = 24,3592$	$\sigma(X) = 4,9355$	$\text{Cov}(X; Y) = 10,5636$
$D(Y) = 7,1605$	$\sigma(Y) = 2,6759$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,7999$
$\beta_1 = 0,4337$	$\beta_0 = 3,8127$	
TSS = 35,8025	ESS = 22,905	RSS = 12,8975
$R^2 = 0,6398$	$R^2_{\text{adj}} = 0,5497$	F = 7,1037

Модель ЗНАЧИМА на 10% уровне значимости и НЕ Значима на 5%.

**Задача №9**9.1)                       $t_0 = 1,8$  \*                       $t_1 = 2,27$  \*\*  
                                  $t_2 = 1,15$  не знач.                       $t_3 = 2,27$  \*\*

9.2)                      Y = 109 351 руб.

9.3)  $\Delta Y = -7 895$                        $\sigma = 3 478$                       [-13598,9; -2191,1]**Задачи №10**10.1)  $\Delta \ln Y = 0,1563$                        $\sigma(\Delta \ln Y) = 0,1322$                       [-0,1028; 0,4154] $Y_2/Y_1 = 1,1692$  (Увеличилась на 16,92%)                      [-9,77%; 51,5%]10.2)  $\Delta \ln Y = 0,026$                        $\sigma(\Delta \ln Y) = 0,1217$                       [-0,288; 0,34] $Y_2/Y_1 = 1,0263$  (Увеличилась на 2,63%)                      [-25,02%; 40,49%]



**Задача №7**

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 16,9% и стандартным отклонением 4,2%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 5,1% и стандартным отклонением 3,1%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,190.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 99% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

**Задача №8**

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	2,2	3,8	6,3	10,3	21,2	28,0	11,967
Y	10,4	31,9	17,4	38,7	67,8	89,3	42,583
X <sup>2</sup>	4,84	14,44	39,69	106,09	449,44	784,00	233,083
Y <sup>2</sup>	108,16	1017,61	302,76	1497,69	4596,84	7974,49	2582,925
XY	22,88	121,22	109,62	398,61	1437,36	2500,40	765,015

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

**Задача №9**

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 50963(\pm 44124) + 8277(\pm 13795) X_1(i) + 19203(\pm 8459) X_2(i) + 979(\pm 848) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Женщины с высшим образованием 50 лет"?

9.3) Постройте 95% доверительный интервал для различия доходов "Женщины с высшим образованием 50 лет" и "Женщины без высшего образования 50 лет".

**Задача №10**

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 6,54(\pm 5,369) + 0,368(\pm 0,615) \ln X_1(i) + 0,007(\pm 0,015) X_2(i) + 0,019(\pm 0,057) X_3(i) + 0,079(\pm 0,044) X_4(i) + 0,01(\pm 0,015) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,827; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 44% и количество спален уменьшилось на 2. Постройте 90% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом НЕ испортить «прекрасный вид». Постройте 99% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,7090$	$\sigma(X) = 0,4542$	$E(Y   X = 0) = 0,8811$
$E(Y) = 0,9227$	$\sigma(Y) = 0,2671$	$E(Y   X = 1) = 0,9398$
$E(XY) = 0,6663$	$\text{cov}(X; Y) = 0,0121$	$E(X   Y = 0) = 0,5524$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,0997$	$E(X   Y = 1) = 0,7221$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 54,434 часов.

2.1) 2,5%	2.2) 95%	2.3) 94,5%	2.4) 22,5%
-----------	----------	------------	------------

**Задачи №3–4**

3.1) 0,5%	3.2) 25%	4) Отвергаем на всех уровнях значимости.
-----------	----------	--

**Задача №5**

$R = 0,43515$	$\sigma = 0,00644$	$[0,42459; 0,44571]$
---------------	--------------------	----------------------

**Задачи №6**

6.1) $E = 1150,00$ у.е.	$\sigma = 23,23$ у.е.	6.2) 5%	6.3) 9067 шт.
-------------------------	-----------------------	---------	---------------

**Задача №7**

$W = 0,3200$	$R_{\text{опт}} = 8,876\%$	$\sigma_{\text{опт}} = 2,707\%$	$[1,89\%; 15,86\%]$
--------------	----------------------------	---------------------------------	---------------------

**Задача №8**

$D(X) = 107,8487$	$\sigma(X) = 10,385$	$\text{Cov}(X; Y) = 306,5091$
$D(Y) = 923,5357$	$\sigma(Y) = 30,3897$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,9712$
$\beta_1 = 2,842$	$\beta_0 = 8,5728$	
$\text{TSS} = 4\,617,6785$	$\text{ESS} = 4\,355,5383$	$\text{RSS} = 262,1402$
$R^2 = 0,9432$	$R^2_{\text{adj}} = 0,929$	$F = 66,4612$

Модель ЗНАЧИМА на всех уровнях значимости.

**Задача №9**

9.1)	$t_0 = 1,15$ не знач.	$t_1 = 0,6$ не знач.
	$t_2 = 2,27$ **	$t_3 = 1,15$ не знач.

9.2)	$Y = 119\,116$ руб.
------	---------------------

9.3) $\Delta Y = -19\,203$	$\sigma = 8\,459$	$[-35782,6; -2623,4]$
----------------------------	-------------------	-----------------------

**Задачи №10**

10.1) $\Delta \ln Y = 0,1202$	$\sigma(\Delta \ln Y) = 0,2002$	$[-0,2081; 0,4485]$
-------------------------------	---------------------------------	---------------------

$Y_2/Y_1 = 1,1277$ (Увеличилась на 12,77%)		$[-18,79\%; 56,6\%]$
--	--	----------------------

10.2) $\Delta \ln Y = 0,029$	$\sigma(\Delta \ln Y) = 0,0589$	$[-0,123; 0,181]$
------------------------------	---------------------------------	-------------------

$Y_2/Y_1 = 1,0294$ (Увеличилась на 2,94%)		$[-11,57\%; 19,84\%]$
---	--	-----------------------



**Задача №1**

Дано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  (табл.). Найдите: математические ожидания  $E(X)$ ,  $E(Y)$  и  $E(XY)$ ; стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$ , корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ ; условные математические ожидания  $E(Y | X = 0)$ ;  $E(Y | X = 1)$ ;  $E(X | Y = 0)$ ;  $E(X | Y = 1)$ .

	$Y = 0$	$Y = 1$	Всего
$X = 0$	0,2055	0,0626	0,2681
$X = 1$	0,3047	0,4272	0,7319
Всего	0,5102	0,4898	1,0000

**Задача №2**

Завод производит лампы со средней продолжительностью работы 3030 ч. и стандартным отклонением 1830 ч. Известно, что продолжительность работы имеет нормальное распределение. Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 900 ламп. Найдите вероятность того, что:

- 2.1)  $X < 2873$  ч.
- 2.2)  $X > 2930$  ч.
- 2.3)  $2989$  ч.  $< X < 3187$  ч.
- 2.4)  $2910$  ч.  $< X < 2930$  ч.

**Задача №3**

В отделе технического контроля (ОТК) завода из задачи №2 проводится контроль выпущенной партии ламп. Тестируется нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 3030 ч. (стандарт)" против односторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп меньше 3030 ч. (брак)". Тест проводится следующим образом: Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 900 ламп. Если  $X > 2910$  ч., то нулевая гипотеза не отвергается.

- 3.1) Каков статистический размер этого теста?
- 3.2) Какова статистическая мощность рассмотренного теста, если нам известно, что, на самом деле, средняя продолжительность работы ламп не изменилась и равна 3030 ч., а стандартное отклонение составило 5373 ч.

**Задача №4**

В результате анализа получено, что средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 900 ламп, выпущенных заводом из задачи №2, составила 3100 ч.

На каких стандартных уровнях значимости (1%, 5% и 10%) отвергается (на каких - не отвергается) нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 3030 ч." против двухсторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп НЕ равна 3030 ч." (Стандартное отклонение такое же, как и в задаче №2.)

**Задача №5**

Проводится опрос 46594 случайно выбранных потенциальных избирателей. 21475 респондентов ответили, что будут голосовать за "нашего" кандидата, а остальные 25119 – за его соперника. Пусть  $R$  – доля всех избирателей, которые собираются отдать "голос" за "нашего" кандидата.

- 5.1) Используя результаты опроса, оцените величину  $R$  и её стандартное отклонение.
- 5.2) Постройте 99% доверительный интервал для оценки величины  $R$ .

**Задача №6**

В течение года ураган может нанести повреждения дому. Повреждения происходят случайным образом. Пусть  $U$  (в у.е.) – размер повреждений в данном году. Пусть в 35% случаев  $U = 22100$  у.е., в остальных случаях  $U = 0$ .

- 6.1) Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение для среднего выборочного  $\bar{U}$  по выборке из 5400 домов (дома выбираются независимо).
- 6.2) Какова вероятность того, что  $\bar{U}$  больше 7831 у.е.
- 6.3) Чему должно быть равно  $n$  – количество домов в выборке, если вероятность того, что среднее выборочное  $\bar{U}$  меньше 7298 у.е. составила 0,5%?

**Задача №7**

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 12,2% и стандартным отклонением 7,1%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 5,3% и стандартным отклонением 3,5%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,411.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 90% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

**Задача №8**

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	4,4	11,9	16,4	27,1	31,1	37,8	21,450
Y	6,8	4,3	9,3	20,1	28,8	39,2	18,083
X <sup>2</sup>	19,36	141,61	268,96	734,41	967,21	1428,84	593,398
Y <sup>2</sup>	46,24	18,49	86,49	404,01	829,44	1536,64	486,885
XY	29,92	51,17	152,52	544,71	895,68	1481,76	525,960

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

**Задача №9**

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 67696(\pm 21979) + 10140(\pm 3292) X_1(i) + 21922(\pm 9657) X_2(i) + 1315(\pm 427) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Мужчины без высшего образования 27 лет"?

9.3) Постройте 90% доверительный интервал для различия доходов "Мужчины без высшего образования 27 лет" и "Мужчины без высшего образования 32 лет".

**Задача №10**

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 9,103(\pm 3,095) + 0,8(\pm 0,597) \ln X_1(i) + 0,006(\pm 0,007) X_2(i) + 0,049(\pm 0,077) X_3(i) + 0,025(\pm 0,02) X_4(i) + 0,019(\pm 0,055) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,765; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 45% и количество спален увеличилось на 1. Постройте 95% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом НЕ испортить «прекрасный вид». Постройте 90% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,7319$	$\sigma(X) = 0,4430$	$E(Y   X = 0) = 0,2335$
$E(Y) = 0,4898$	$\sigma(Y) = 0,4999$	$E(Y   X = 1) = 0,5837$
$E(XY) = 0,4272$	$\text{cov}(X; Y) = 0,0687$	$E(X   Y = 0) = 0,5972$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,3102$	$E(X   Y = 1) = 0,8722$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 61,000 часов.

2.1) 0,5%	2.2) 95%	2.3) 74,5%	2.4) 2,5%
-----------	----------	------------	-----------

**Задачи №3–4**

3.1) 2,5%	3.2) 25%	4) НЕ отвергаем на всех уровнях значимости.
-----------	----------	---

**Задача №5**

$R = 0,46090$	$\sigma = 0,00231$	$[0,45494; 0,46686]$
---------------	--------------------	----------------------

**Задачи №6**

6.1) $E = 7735,00$ у.е.	$\sigma = 143,45$ у.е.	6.2) 25%	6.3) 3873 шт.
-------------------------	------------------------	----------	---------------

**Задача №7**

$W = 0,0482$	$R_{\text{опт}} = 5,633\%$	$\sigma_{\text{опт}} = 3,486\%$	$[-0,08\%; 11,35\%]$
--------------	----------------------------	---------------------------------	----------------------

**Задача №8**

$D(X) = 159,9546$	$\sigma(X) = 12,6473$	$\text{Cov}(X; Y) = 165,6956$
$D(Y) = 191,8681$	$\sigma(Y) = 13,8516$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,9458$
$\beta_1 = 1,0359$	$\beta_0 = -4,1371$	
$\text{TSS} = 959,3405$	$\text{ESS} = 858,2133$	$\text{RSS} = 101,1272$
$R^2 = 0,8946$	$R^2_{\text{adj}} = 0,8682$	$F = 33,9459$

Модель ЗНАЧИМА на всех уровнях значимости.

**Задача №9**

9.1)	$t_0 = 3,08$ ***	$t_1 = 3,08$ ***
	$t_2 = 2,27$ **	$t_3 = 3,08$ ***

9.2)  $Y = 113\,341$  руб.

9.3) $\Delta Y = 6\,575$	$\sigma = 2\,135$	$[3073,6; 10076,4]$
--------------------------	-------------------	---------------------

**Задачи №10**

10.1) $\Delta \text{Ln} Y = 0,3033$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,2272$	$[-0,142; 0,7486]$
$Y_2/Y_1 = 1,3543$ (Увеличилась на 35,43%)		$[-13,24\%; 111,4\%]$
10.2) $\Delta \text{Ln} Y = 0,068$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,0946$	$[-0,0871; 0,2231]$
$Y_2/Y_1 = 1,0704$ (Увеличилась на 7,04%)		$[-8,34\%; 24,99\%]$



**Задача №1**

Дано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  (табл.). Найдите: математические ожидания  $E(X)$ ,  $E(Y)$  и  $E(XY)$ ; стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$ , корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ ; условные математические ожидания  $E(Y | X = 0)$ ;  $E(Y | X = 1)$ ;  $E(X | Y = 0)$ ;  $E(X | Y = 1)$ .

	$Y = 0$	$Y = 1$	Всего
$X = 0$	0,2406	0,2021	0,4427
$X = 1$	0,1809	0,3764	0,5573
Всего	0,4215	0,5785	1,0000

**Задача №2**

Завод производит лампы со средней продолжительностью работы 4070 ч. и стандартным отклонением 1150 ч. Известно, что продолжительность работы имеет нормальное распределение. Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 1010 ламп. Найдите вероятность того, что:

- 2.1)  $X < 3999$  ч.
- 2.2)  $X > 4094$  ч.
- 2.3)  $4046$  ч.  $< X < 4141$  ч.
- 2.4)  $3977$  ч.  $< X < 3999$  ч.

**Задача №3**

В отделе технического контроля (ОТК) завода из задачи №2 проводится контроль выпущенной партии ламп. Тестируется нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 4070 ч. (стандарт)" против односторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп меньше 4070 ч. (брак)". Тест проводится следующим образом: Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 1010 ламп. Если  $X > 3977$  ч., то нулевая гипотеза не отвергается.

- 3.1) Каков статистический размер этого теста?
- 3.2) Какова статистическая мощность рассмотренного теста, если нам известно, что, на самом деле, средняя продолжительность работы ламп составила 4036 ч., а стандартное отклонение не изменилось и равно 1150 ч.

**Задача №4**

В результате анализа получено, что средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 1010 ламп, выпущенных заводом из задачи №2, составила 3988 ч.

На каких стандартных уровнях значимости (1%, 5% и 10%) отвергается (на каких - не отвергается) нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 4070 ч." против двухсторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп НЕ равна 4070 ч." (Стандартное отклонение такое же, как и в задаче №2.)

**Задача №5**

Проводится опрос 30354 случайно выбранных потенциальных избирателей. 17949 респондентов ответили, что будут голосовать за "нашего" кандидата, а остальные 12405 – за его соперника. Пусть  $R$  – доля всех избирателей, которые собираются отдать "голос" за "нашего" кандидата.

- 5.1) Используя результаты опроса, оцените величину  $R$  и её стандартное отклонение.
- 5.2) Постройте 90% доверительный интервал для оценки величины  $R$ .

**Задача №6**

В течение года ураган может нанести повреждения дому. Повреждения происходят случайным образом. Пусть  $U$  (в у.е.) – размер повреждений в данном году. Пусть в 43% случаев  $U = 10900$  у.е., в остальных случаях  $U = 0$ .

- 6.1) Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение для среднего выборочного  $\bar{U}$  по выборке из 2910 домов (дома выбираются независимо).
- 6.2) Какова вероятность того, что  $\bar{U}$  больше 4429 у.е.
- 6.3) Чему должно быть равно  $n$  – количество домов в выборке, если вероятность того, что среднее выборочное  $\bar{U}$  меньше 4643 у.е. составила 25%?

**Задача №7**

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 17,5% и стандартным отклонением 10,1%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 5,7% и стандартным отклонением 3,4%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,216.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 99% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

**Задача №8**

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	8,8	14,0	15,6	20,1	29,9	39,6	21,333
Y	7,3	14,7	26,7	46,7	41,7	30,4	27,917
X <sup>2</sup>	77,44	196,00	243,36	404,01	894,01	1568,16	563,830
Y <sup>2</sup>	53,29	216,09	712,89	2180,89	1738,89	924,16	971,035
XY	64,24	205,80	416,52	938,67	1246,83	1203,84	679,317

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

**Задача №9**

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 34926(\pm 19403) + 6029(\pm 5220) X_1(i) + 22215(\pm 9786) X_2(i) + 1438(\pm 1245) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Мужчины без высшего образования 25 лет"?

9.3) Постройте 99% доверительный интервал для различия доходов "Мужчины без высшего образования 25 лет" и "Мужчины без высшего образования 52 лет".

**Задача №10**

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 8,035(\pm 5,191) + 0,435(\pm 0,385) \ln X_1(i) + 0,012(\pm 0,011) X_2(i) + 0,017(\pm 0,092) X_3(i) + 0,09(\pm 0,08) X_4(i) + 0,025(\pm 0,06) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,889; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 42% и количество спален увеличилось на 1. Постройте 95% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом испортить «прекрасный вид». Постройте 99% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,5573$	$\sigma(X) = 0,4967$	$E(Y   X = 0) = 0,4565$
$E(Y) = 0,5785$	$\sigma(Y) = 0,4938$	$E(Y   X = 1) = 0,6754$
$E(XY) = 0,3764$	$\text{cov}(X; Y) = 0,0540$	$E(X   Y = 0) = 0,4292$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,2202$	$E(X   Y = 1) = 0,6506$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 36,186 часов.

2.1) 2,5%	2.2) 25%	2.3) 72,5%	2.4) 2%
-----------	----------	------------	---------

**Задачи №3-4**

3.1) 0,5%	3.2) 5%	4) Отвергаем на 5% и 10%; НЕ отвергаем на 1% уровне значимости.
-----------	---------	---

**Задача №5**

$R = 0,59132$	$\sigma = 0,00282$	$[0,58670; 0,59594]$
---------------	--------------------	----------------------

**Задачи №6**

6.1) $E = 4687,00$ у.е.	$\sigma = 100,03$ у.е.	6.2) 99,5%	6.3) 6753 шт.
-------------------------	------------------------	------------	---------------

**Задача №7**

$W = 0,0420$	$R_{\text{опт}} = 6,196\%$	$\sigma_{\text{опт}} = 3,374\%$	$[-2,51\%; 14,90\%]$
--------------	----------------------------	---------------------------------	----------------------

**Задача №8**

$D(X) = 130,4797$	$\sigma(X) = 11,4228$	$\text{Cov}(X; Y) = 100,5164$
$D(Y) = 230,0113$	$\sigma(Y) = 15,1661$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,5802$
$\beta_1 = 0,7704$	$\beta_0 = 11,4821$	
$\text{TSS} = 1\ 150,0565$	$\text{ESS} = 387,1693$	$\text{RSS} = 762,8872$
$R^2 = 0,3367$	$R^2_{\text{adj}} = 0,1708$	$F = 2,03$

Модель ЗНАЧИМА на 50% уровне значимости и НЕ Значима на 10%.

**Задача №9**

9.1)	$t_0 = 1,8$ *	$t_1 = 1,15$ не знач.
	$t_2 = 2,27$ **	$t_3 = 1,16$ не знач.

9.2)	$Y = 76\ 905$ руб.
------	--------------------

9.3) $\Delta Y = 38\ 826$	$\sigma = 33\ 615$	$[-47900,7; 125552,7]$
---------------------------	--------------------	------------------------

**Задачи №10**

10.1) $\Delta \ln Y = 0,1645$	$\sigma(\Delta \ln Y) = 0,1449$	$[-0,1195; 0,4485]$
-------------------------------	---------------------------------	---------------------

$Y_2/Y_1 = 1,1788$ (Увеличилась на 17,88%)	$[-11,26\%; 56,6\%]$
--	----------------------

10.2) $\Delta \ln Y = -0,073$	$\sigma(\Delta \ln Y) = 0,1219$	$[-0,3875; 0,2415]$
-------------------------------	---------------------------------	---------------------

$Y_2/Y_1 = 0,9296$ (Уменьшилась на 7,04%)	$[-32,12\%; 27,32\%]$
---	-----------------------



**Задача №1**

Дано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  (табл.). Найдите: математические ожидания  $E(X)$ ,  $E(Y)$  и  $E(XY)$ ; стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$ , корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ ; условные математические ожидания  $E(Y | X = 0)$ ;  $E(Y | X = 1)$ ;  $E(X | Y = 0)$ ;  $E(X | Y = 1)$ .

	$Y = 0$	$Y = 1$	Всего
$X = 0$	0,1857	0,2642	0,4499
$X = 1$	0,2394	0,3107	0,5501
Всего	0,4251	0,5749	1,0000

**Задача №2**

Завод производит лампы со средней продолжительностью работы 9950 ч. и стандартным отклонением 1040 ч. Известно, что продолжительность работы имеет нормальное распределение. Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 430 ламп. Найдите вероятность того, что:

- 2.1)  $X < 9821$  ч.
- 2.2)  $X > 9984$  ч.
- 2.3)  $9868$  ч.  $< X < 10048$  ч.
- 2.4)  $9984$  ч.  $< X < 10079$  ч.

**Задача №3**

В отделе технического контроля (ОТК) завода из задачи №2 проводится контроль выпущенной партии ламп. Тестируется нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 9950 ч. (стандарт)" против односторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп меньше 9950 ч. (брак)". Тест проводится следующим образом: Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 430 ламп. Если  $X > 9852$  ч., то нулевая гипотеза не отвергается.

- 3.1) Каков статистический размер этого теста?
- 3.2) Какова статистическая мощность рассмотренного теста, если нам известно, что, на самом деле, средняя продолжительность работы ламп составила 9770 ч., а стандартное отклонение не изменилось и равно 1040 ч.

**Задача №4**

В результате анализа получено, что средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 430 ламп, выпущенных заводом из задачи №2, составила 9796 ч.

На каких стандартных уровнях значимости (1%, 5% и 10%) отвергается (на каких - не отвергается) нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 9950 ч." против двухсторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп НЕ равна 9950 ч." (Стандартное отклонение такое же, как и в задаче №2.)

**Задача №5**

Проводится опрос 40460 случайно выбранных потенциальных избирателей. 19500 респондентов ответили, что будут голосовать за "нашего" кандидата, а остальные 20960 – за его соперника. Пусть  $R$  – доля всех избирателей, которые собираются отдать "голос" за "нашего" кандидата.

- 5.1) Используя результаты опроса, оцените величину  $R$  и её стандартное отклонение.
- 5.2) Постройте 95% доверительный интервал для оценки величины  $R$ .

**Задача №6**

В течение года ураган может нанести повреждения дому. Повреждения происходят случайным образом. Пусть  $U$  (в у.е.) – размер повреждений в данном году. Пусть в 36% случаев  $U = 36300$  у.е., в остальных случаях  $U = 0$ .

- 6.1) Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение для среднего выборочного  $\bar{U}$  по выборке из 5060 домов (дома выбираются независимо).
- 6.2) Какова вероятность того, что  $\bar{U}$  больше 13232 у.е.
- 6.3) Чему должно быть равно  $n$  – количество домов в выборке, если вероятность того, что среднее выборочное  $\bar{U}$  меньше 13648 у.е. составила 99,5%?

**Задача №7**

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 14,5% и стандартным отклонением 6,3%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 7,8% и стандартным отклонением 5,5%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,488.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 90% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

**Задача №8**

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	2,2	12,8	14,7	19,6	28,7	37,9	19,317
Y	6,3	10,4	18,8	42,4	74,3	111,0	43,867
X <sup>2</sup>	4,84	163,84	216,09	384,16	823,69	1436,41	504,838
Y <sup>2</sup>	39,69	108,16	353,44	1797,76	5520,49	12321,00	3356,757
XY	13,86	133,12	276,36	831,04	2132,41	4206,90	1265,615

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

**Задача №9**

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 51117(\pm 28398) + 12609(\pm 10917) X_1(i) + 20030(\pm 8824) X_2(i) + 627(\pm 276) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Мужчины без высшего образования 46 лет"?

9.3) Постройте 90% доверительный интервал для различия доходов "Мужчины без высшего образования 46 лет" и "Мужчины с высшим образованием 46 лет".

**Задача №10**

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 9,866(\pm 7,222) + 0,359(\pm 0,554) \ln X_1(i) + 0,009(\pm 0,011) X_2(i) + 0,095(\pm 0,037) X_3(i) + 0,057(\pm 0,123) X_4(i) + 0,011(\pm 0,026) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,68; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 51% и количество спален увеличилось на 3. Постройте 95% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом испортить «прекрасный вид». Постройте 99% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.



**Задача №1**

$E(X) = 0,5501$	$\sigma(X) = 0,4975$	$E(Y   X = 0) = 0,5872$
$E(Y) = 0,5749$	$\sigma(Y) = 0,4944$	$E(Y   X = 1) = 0,5648$
$E(XY) = 0,3107$	$\text{cov}(X; Y) = -0,0056$	$E(X   Y = 0) = 0,5632$
	$\text{corr}(X; Y) = -0,0228$	$E(X   Y = 1) = 0,5404$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 50,153 часов.

2.1) 0,5%	2.2) 25%	2.3) 92,5%	2.4) 24,5%
-----------	----------	------------	------------

**Задачи №3–4**

3.1) 2,5%	3.2) 95%	4) Отвергаем на всех уровнях значимости.
-----------	----------	--

**Задача №5**

$R = 0,48196$	$\sigma = 0,00248$	$[0,47710; 0,48682]$
---------------	--------------------	----------------------

**Задачи №6**

6.1) $E = 13068,00$ у.е.	$\sigma = 244,95$ у.е.	6.2) 25%	6.3) 6008 шт.
--------------------------	------------------------	----------	---------------

**Задача №7**

$W = 0,3693$	$R_{\text{опт}} = 10,274\%$	$\sigma_{\text{опт}} = 5,032\%$	$[2,02\%; 18,53\%]$
--------------	-----------------------------	---------------------------------	---------------------

**Задача №8**

$D(X) = 158,0298$	$\sigma(X) = 12,571$	$\text{Cov}(X; Y) = 501,8834$
$D(Y) = 1\,718,932$	$\sigma(Y) = 41,46$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,9629$
$\beta_1 = 3,1759$	$\beta_0 = -17,4819$	
$\text{TSS} = 8\,594,66$	$\text{ESS} = 7\,969,6028$	$\text{RSS} = 625,0572$
$R^2 = 0,9273$	$R^2_{\text{adj}} = 0,9091$	$F = 51,0008$

Модель ЗНАЧИМА на всех уровнях значимости.

**Задача №9**

9.1)	$t_0 = 1,8^*$	$t_1 = 1,15$ не знач.
	$t_2 = 2,27^{**}$	$t_3 = 2,27^{**}$

9.2)  $Y = 92\,568$  руб.

9.3) $\Delta Y = 20\,030$	$\sigma = 8\,824$	$[5558,6; 34501,4]$
---------------------------	-------------------	---------------------

**Задачи №10**

10.1) $\Delta \ln Y = 0,1749$	$\sigma(\Delta \ln Y) = 0,2519$	$[-0,3188; 0,6686]$
$Y_2/Y_1 = 1,1911$ (Увеличилась на 19,11%)		$[-27,3\%; 95,15\%]$
10.2) $\Delta \ln Y = 0,038$	$\sigma(\Delta \ln Y) = 0,1284$	$[-0,2933; 0,3693]$
$Y_2/Y_1 = 1,0387$ (Увеличилась на 3,87%)		$[-25,42\%; 44,67\%]$

**Задача №1**

Дано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  (табл.). Найдите: математические ожидания  $E(X)$ ,  $E(Y)$  и  $E(XY)$ ; стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$ , корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ ; условные математические ожидания  $E(Y | X = 0)$ ;  $E(Y | X = 1)$ ;  $E(X | Y = 0)$ ;  $E(X | Y = 1)$ .

	$Y = 0$	$Y = 1$	Всего
$X = 0$	0,0371	0,3090	0,3461
$X = 1$	0,2539	0,4000	0,6539
Всего	0,2910	0,7090	1,0000

**Задача №2**

Завод производит лампы со средней продолжительностью работы 5350 ч. и стандартным отклонением 1260 ч. Известно, что продолжительность работы имеет нормальное распределение. Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 290 ламп. Найдите вероятность того, что:

- 2.1)  $X < 5205$  ч.
- 2.2)  $X > 5400$  ч.
- 2.3)  $5159$  ч.  $< X < 5471$  ч.
- 2.4)  $5400$  ч.  $< X < 5495$  ч.

**Задача №3**

В отделе технического контроля (ОТК) завода из задачи №2 проводится контроль выпущенной партии ламп. Тестируется нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 5350 ч. (стандарт)" против односторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп меньше 5350 ч. (брак)". Тест проводится следующим образом: Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 290 ламп. Если  $X > 5229$  ч., то нулевая гипотеза не отвергается.

- 3.1) Каков статистический размер этого теста?
- 3.2) Какова статистическая мощность рассмотренного теста, если нам известно, что, на самом деле, средняя продолжительность работы ламп не изменилась и равна 5350 ч., а стандартное отклонение составило 3075 ч.

**Задача №4**

В результате анализа получено, что средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 290 ламп, выпущенных заводом из задачи №2, составила 5483 ч.

На каких стандартных уровнях значимости (1%, 5% и 10%) отвергается (на каких - не отвергается) нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 5350 ч." против двухсторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп НЕ равна 5350 ч." (Стандартное отклонение такое же, как и в задаче №2.)

**Задача №5**

Проводится опрос 15409 случайно выбранных потенциальных избирателей. 8630 респондентов ответили, что будут голосовать за "нашего" кандидата, а остальные 6779 – за его соперника. Пусть  $R$  – доля всех избирателей, которые собираются отдать "голос" за "нашего" кандидата.

- 5.1) Используя результаты опроса, оцените величину  $R$  и её стандартное отклонение.
- 5.2) Постройте 99% доверительный интервал для оценки величины  $R$ .

**Задача №6**

В течение года ураган может нанести повреждения дому. Повреждения происходят случайным образом. Пусть  $U$  (в у.е.) – размер повреждений в данном году. Пусть в 41% случаев  $U = 30300$  у.е., в остальных случаях  $U = 0$ .

- 6.1) Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение для среднего выборочного  $\bar{U}$  по выборке из 2130 домов (дома выбираются независимо).
- 6.2) Какова вероятность того, что  $\bar{U}$  больше 11590 у.е.
- 6.3) Чему должно быть равно  $n$  – количество домов в выборке, если вероятность того, что среднее выборочное  $\bar{U}$  меньше 11835 у.е. составила 2,5%?

**Задача №7**

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 18,9% и стандартным отклонением 5,6%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 3,3% и стандартным отклонением 3,1%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,426.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 95% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

**Задача №8**

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	2,6	11,6	13,4	23,5	26,8	34,8	18,783
Y	5,8	18,9	20,0	41,7	74,1	49,0	34,917
X <sup>2</sup>	6,76	134,56	179,56	552,25	718,24	1211,04	467,068
Y <sup>2</sup>	33,64	357,21	400,00	1738,89	5490,81	2401,00	1736,925
XY	15,08	219,24	268,00	979,95	1985,88	1705,20	862,225

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

**Задача №9**

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 39284(\pm 17306) + 8931(\pm 14885) X_1(i) + 21347(\pm 9404) X_2(i) + 1197(\pm 1995) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Женщины с высшим образованием 29 лет"?

9.3) Постройте 95% доверительный интервал для различия доходов "Женщины с высшим образованием 29 лет" и "Мужчины с высшим образованием 29 лет".

**Задача №10**

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 10,21(\pm 6,391) + 0,308(\pm 0,667) \ln X_1(i) + 0,005(\pm 0,01) X_2(i) + 0,021(\pm 0,1) X_3(i) + 0,098(\pm 0,121) X_4(i) + 0,006(\pm 0,095) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,588; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 33% и количество спален уменьшилось на 2. Постройте 90% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом испортить «прекрасный вид». Постройте 99% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,6539$	$\sigma(X) = 0,4757$	$E(Y   X = 0) = 0,8928$
$E(Y) = 0,7090$	$\sigma(Y) = 0,4542$	$E(Y   X = 1) = 0,6117$
$E(XY) = 0,4000$	$\text{cov}(X; Y) = -0,0636$	$E(X   Y = 0) = 0,8725$
	$\text{corr}(X; Y) = -0,2944$	$E(X   Y = 1) = 0,5642$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 73,990 часов.

2.1) 2,5%	2.2) 25%	2.3) 94,5%	2.4) 22,5%
-----------	----------	------------	------------

**Задачи №3-4**

3.1) 5%	3.2) 25%	4) Отвергаем на 10%; НЕ отвергаем на 1% и 5% уровнях значимости.
---------	----------	--

**Задача №5**

$R = 0,56006$	$\sigma = 0,00400$	$[0,54974; 0,57038]$
---------------	--------------------	----------------------

**Задачи №6**

6.1) $E = 12423,00$ у.е.	$\sigma = 322,90$ у.е.	6.2) 99,5%	6.3) 2468 шт.
--------------------------	------------------------	------------	---------------

**Задача №7**

$W = 0,0846$	$R_{\text{опт}} = 4,620\%$	$\sigma_{\text{опт}} = 3,070\%$	$[-1,40\%; 10,64\%]$
--------------	----------------------------	---------------------------------	----------------------

**Задача №8**

$D(X) = 137,1203$	$\sigma(X) = 11,7098$	$\text{Cov}(X; Y) = 247,6548$
$D(Y) = 621,2737$	$\sigma(Y) = 24,9254$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,8485$
$\beta_1 = 1,8061$	$\beta_0 = 0,993$	
$\text{TSS} = 3\,106,3685$	$\text{ESS} = 2\,236,4632$	$\text{RSS} = 869,9053$
$R^2 = 0,72$	$R^2_{\text{adj}} = 0,65$	$F = 10,2837$

Модель ЗНАЧИМА на 5% уровне значимости и НЕ Значима на 1%.

**Задача №9**

9.1)	$t_0 = 2,27^{**}$	$t_1 = 0,6$ не знач.
	$t_2 = 2,27^{**}$	$t_3 = 0,6$ не знач.

9.2)	$Y = 95\,344$ руб.
------	--------------------

9.3) $\Delta Y = 8\,931$	$\sigma = 14\,885$	$[-20243,6; 38105,6]$
--------------------------	--------------------	-----------------------

**Задачи №10**

10.1) $\Delta \ln Y = 0,0778$	$\sigma(\Delta \ln Y) = 0,1792$	$[-0,2161; 0,3717]$
$Y_2/Y_1 = 1,0809$ (Увеличилась на 8,09%)		$[-19,43\%; 45,02\%]$
10.2) $\Delta \ln Y = -0,077$	$\sigma(\Delta \ln Y) = 0,157$	$[-0,4821; 0,3281]$
$Y_2/Y_1 = 0,9259$ (Уменьшилась на 7,41%)		$[-38,25\%; 38,83\%]$



**Задача №7**

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 18,2% и стандартным отклонением 12%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 6,3% и стандартным отклонением 5,2%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,357.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 99% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

**Задача №8**

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	3,4	9,9	11,2	14,0	19,9	21,5	13,317
Y	11,3	33,2	98,6	153,1	169,3	110,7	96,033
X <sup>2</sup>	11,56	98,01	125,44	196,00	396,01	462,25	214,878
Y <sup>2</sup>	127,69	1102,24	9721,96	23439,61	28662,49	12254,49	12551,413
XY	38,42	328,68	1104,32	2143,40	3369,07	2380,05	1560,657

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

**Задача №9**

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 56840(\pm 18455) + 13988(\pm 6162) X_1(i) + 24470(\pm 13594) X_2(i) + 1234(\pm 1068) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Женщины без высшего образования 34 лет"?

9.3) Постройте 99% доверительный интервал для различия доходов "Женщины без высшего образования 34 лет" и "Женщины с высшим образованием 34 лет".

**Задача №10**

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 9,196(\pm 3,963) + 0,709(\pm 0,756) \ln X_1(i) + 0,014(\pm 0,008) X_2(i) + 0,025(\pm 0,072) X_3(i) + 0,117(\pm 0,027) X_4(i) + 0,006(\pm 0,025) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,531; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 37% и количество спален увеличилось на 2. Постройте 90% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом НЕ испортить «прекрасный вид». Постройте 99% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,4421$	$\sigma(X) = 0,4966$	$E(Y   X = 0) = 0,5030$
$E(Y) = 0,5694$	$\sigma(Y) = 0,4952$	$E(Y   X = 1) = 0,6532$
$E(XY) = 0,2888$	$\text{cov}(X; Y) = 0,0371$	$E(X   Y = 0) = 0,3560$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,1509$	$E(X   Y = 1) = 0,5072$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 69,768 часов.

2.1) 2,5%                      2.2) 75%                      2.3) 2%                      2.4) 70%

**Задачи №3–4**

3.1) 5%                      3.2) 25%                      4) Отверяем на 10%; НЕ отвергаем на 1% и 5% уровнях значимости.

**Задача №5**R = 0,57290                       $\sigma = 0,00272$                       [0,56844; 0,57736]**Задачи №6**6.1) E = 952,00 у.е.                       $\sigma = 34,96$  у.е.                      6.2) 75%                      6.3) 5408 шт.**Задача №7**W = 0,0377                      R<sub>опт</sub> = 6,749%                       $\sigma_{\text{опт}} = 5,183\%$                       [-6,62%; 20,12%]**Задача №8**

$D(X) = 45,0426$	$\sigma(X) = 6,7114$	$\text{Cov}(X; Y) = 338,1426$
$D(Y) = 3\,994,8911$	$\sigma(Y) = 63,2052$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,7971$
$\beta_1 = 7,5072$	$\beta_0 = -3,9404$	
TSS = 19\,974,4555	ESS = 12\,692,4753	RSS = 7\,281,9802
R <sup>2</sup> = 0,6354	R <sup>2</sup> <sub>adj</sub> = 0,5443	F = 6,972

Модель ЗНАЧИМА на 10% уровне значимости и НЕ Значима на 5%.

**Задача №9**9.1)  $t_0 = 3,08$  \*\*\*                       $t_1 = 2,27$  \*\*  
 $t_2 = 1,8$  \*                       $t_3 = 1,16$  не знач.

9.2) Y = 98 796 руб.

9.3)  $\Delta Y = 24\,470$                        $\sigma = 13\,594$                       [-10602,5; 59542,5]**Задачи №10**10.1)  $\Delta \ln Y = 0,2512$                        $\sigma(\Delta \ln Y) = 0,2469$                       [-0,1537; 0,6561]  
 $Y_2/Y_1 = 1,2856$  (Увеличилась на 28,56%)                      [-14,25%; 92,73%]10.2)  $\Delta \ln Y = 0,031$                        $\sigma(\Delta \ln Y) = 0,0762$                       [-0,1656; 0,2276]  
 $Y_2/Y_1 = 1,0315$  (Увеличилась на 3,15%)                      [-15,26%; 25,56%]





**Задача №7**

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 19,6% и стандартным отклонением 12,8%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 4% и стандартным отклонением 5,4%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,328.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 95% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

**Задача №8**

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	7,8	16,7	18,0	28,5	35,4	45,1	25,250
Y	10,8	31,9	43,8	64,3	69,7	44,2	44,117
X <sup>2</sup>	60,84	278,89	324,00	812,25	1253,16	2034,01	793,858
Y <sup>2</sup>	116,64	1017,61	1918,44	4134,49	4858,09	1953,64	2333,152
XY	84,24	532,73	788,40	1832,55	2467,38	1993,42	1283,120

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

**Задача №9**

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 64564(\pm 55900) + 11828(\pm 5211) X1(i) + 19890(\pm 11050) X2(i) + 661(\pm 367) X3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Мужчины с высшим образованием 33 лет"?

9.3) Постройте 90% доверительный интервал для различия доходов "Мужчины с высшим образованием 33 лет" и "Женщины с высшим образованием 33 лет".

**Задача №10**

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 6,442(\pm 3,943) + 0,38(\pm 0,554) \ln X1(i) + 0,012(\pm 0,011) X2(i) + 0,02(\pm 0,051) X3(i) + 0,104(\pm 0,058) X4(i) + 0,016(\pm 0,039) X3(i) X4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X1$  – площадь дома;  $X2$  – количество спален;  $X3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,664; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 10% и количество спален уменьшилось на 1. Постройте 90% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом испортить «прекрасный вид». Постройте 95% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,7442$	$\sigma(X) = 0,4363$	$E(Y   X = 0) = 0,2134$
$E(Y) = 0,7172$	$\sigma(Y) = 0,4504$	$E(Y   X = 1) = 0,8904$
$E(XY) = 0,6626$	$\text{cov}(X; Y) = 0,1289$	$E(X   Y = 0) = 0,2885$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,6559$	$E(X   Y = 1) = 0,9239$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 8,098 часов.

2.1) 75%	2.2) 0,5%	2.3) 2,5%	2.4) 74,5%
----------	-----------	-----------	------------

**Задачи №3–4**

3.1) 5%	3.2) 75%	4) Отвергаем на 5% и 10%; НЕ отвергаем на 1% уровне значимости.
---------	----------	---

**Задача №5**

$R = 0,38364$	$\sigma = 0,00252$	$[0,37870; 0,38858]$
---------------	--------------------	----------------------

**Задачи №6**

6.1) $E = 1144,00$ у.е.	$\sigma = 14,33$ у.е.	6.2) 2,5%	6.3) 6180 шт.
-------------------------	-----------------------	-----------	---------------

**Задача №7**

$W = 0,0439$	$R_{\text{опт}} = 4,685\%$	$\sigma_{\text{опт}} = 5,374\%$	$[-5,85\%; 15,22\%]$
--------------	----------------------------	---------------------------------	----------------------

**Задача №8**

$D(X) = 187,5546$	$\sigma(X) = 13,6951$	$\text{Cov}(X; Y) = 202,9989$
$D(Y) = 464,2108$	$\sigma(Y) = 21,5456$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,688$
$\beta_1 = 1,0823$	$\beta_0 = 16,7889$	
$\text{TSS} = 2\,321,054$	$\text{ESS} = 1\,098,5749$	$\text{RSS} = 1\,222,4791$
$R^2 = 0,4733$	$R^2_{\text{adj}} = 0,3416$	$F = 3,5946$

Модель ЗНАЧИМА на 50% уровне значимости и НЕ Значима на 10%.

**Задача №9**

9.1)	$t_0 = 1,15$ не знач.	$t_1 = 2,27$ **
	$t_2 = 1,8$ *	$t_3 = 1,8$ *
9.2)	$Y = 118\,095$ руб.	
9.3) $\Delta Y = -11\,828$	$\sigma = 5\,211$	$[-20374,0; -3282,0]$

**Задачи №10**

10.1) $\Delta \text{Ln} Y = 0,0242$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,0462$	$[-0,0516; 0,1]$
$Y_2/Y_1 = 1,0245$ (Увеличилась на 2,45%)		$[-5,03\%; 10,52\%]$
10.2) $\Delta \text{Ln} Y = -0,084$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,0772$	$[-0,2353; 0,0673]$
$Y_2/Y_1 = 0,9194$ (Уменьшилась на 8,06%)		$[-20,97\%; 6,96\%]$



**Задача №7**

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 8,6% и стандартным отклонением 5,2%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 6,9% и стандартным отклонением 4,2%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,691.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 99% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

**Задача №8**

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	5,4	16,1	25,0	26,6	34,8	39,1	24,500
Y	3,5	8,5	19,0	44,3	53,3	44,7	28,883
X <sup>2</sup>	29,16	259,21	625,00	707,56	1211,04	1528,81	726,797
Y <sup>2</sup>	12,25	72,25	361,00	1962,49	2840,89	1998,09	1207,828
XY	18,90	136,85	475,00	1178,38	1854,84	1747,77	901,957

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

**Задача №9**

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 74908(\pm 24321) + 13516(\pm 11702) X_1(i) + 17830(\pm 5789) X_2(i) + 617(\pm 534) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Женщины с высшим образованием 45 лет"?

9.3) Постройте 95% доверительный интервал для различия доходов "Женщины с высшим образованием 45 лет" и "Мужчины с высшим образованием 45 лет".

**Задача №10**

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 10,82(\pm 6,048) + 0,506(\pm 0,121) \ln X_1(i) + 0,006(\pm 0,009) X_2(i) + 0,038(\pm 0,106) X_3(i) + 0,055(\pm 0,052) X_4(i) + 0,018(\pm 0,065) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,589; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 47% и количество спален увеличилось на 3. Постройте 99% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом НЕ испортить «прекрасный вид». Постройте 95% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,5761$	$\sigma(X) = 0,4942$	$E(Y   X = 0) = 0,3232$
$E(Y) = 0,4141$	$\sigma(Y) = 0,4926$	$E(Y   X = 1) = 0,4810$
$E(XY) = 0,2771$	$\text{cov}(X; Y) = 0,0385$	$E(X   Y = 0) = 0,5103$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,1581$	$E(X   Y = 1) = 0,6692$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 162,488 часов.

2.1) 0,5%                      2.2) 2,5%                      2.3) 22,5%                      2.4) 74,5%

**Задачи №3–4**

3.1) 5%                      3.2) 25%                      4) Отверяем на 10%; НЕ отвергаем на 1% и 5% уровнях значимости.

**Задача №5**R = 0,69794                       $\sigma = 0,00324$                       [0,68958; 0,70630]**Задачи №6**6.1) E = 8316,00 у.е.                       $\sigma = 238,31$  у.е.                      6.2) 0,5%                      6.3) 2992 шт.**Задача №7**W = 0,1758                      R<sub>опт</sub> = 7,199%                       $\sigma_{\text{опт}} = 4,146\%$                       [-3,50%; 17,90%]**Задача №8**

$D(X) = 151,8564$	$\sigma(X) = 12,323$	$\text{Cov}(X; Y) = 233,1882$
$D(Y) = 448,3204$	$\sigma(Y) = 21,1736$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,8937$
$\beta_1 = 1,5356$	$\beta_0 = -8,7392$	
TSS = 2 241,602	ESS = 1 790,3999	RSS = 451,2021
R <sup>2</sup> = 0,7987	R <sup>2</sup> <sub>adj</sub> = 0,7484	F = 15,8723

Модель ЗНАЧИМА на 5% уровне значимости и НЕ Значима на 1%.

**Задача №9**9.1)  $t_0 = 3,08$  \*\*\*                       $t_1 = 1,16$  не знач.  
 $t_2 = 3,08$  \*\*\*                       $t_3 = 1,16$  не знач.

9.2) Y = 120 503 руб.

9.3)  $\Delta Y = 13 516$                        $\sigma = 11 702$                       [-9419,9; 36451,9]**Задачи №10**10.1)  $\Delta \ln Y = 0,2129$                        $\sigma(\Delta \ln Y) = 0,0662$                       [0,0421; 0,3837] $Y_2/Y_1 = 1,2373$  (Увеличилась на 23,73%)                      [4,3%; 46,77%]10.2)  $\Delta \ln Y = 0,056$                        $\sigma(\Delta \ln Y) = 0,1243$                       [-0,1876; 0,2996] $Y_2/Y_1 = 1,0576$  (Увеличилась на 5,76%)                      [-17,11%; 34,93%]



**Задача №1**

Дано совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  (табл.). Найдите: математические ожидания  $E(X)$ ,  $E(Y)$  и  $E(XY)$ ; стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$ , корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ ; условные математические ожидания  $E(Y | X = 0)$ ;  $E(Y | X = 1)$ ;  $E(X | Y = 0)$ ;  $E(X | Y = 1)$ .

	$Y = 0$	$Y = 1$	Всего
$X = 0$	0,0442	0,1155	0,1597
$X = 1$	0,2666	0,5737	0,8403
Всего	0,3108	0,6892	1,0000

**Задача №2**

Завод производит лампы со средней продолжительностью работы 9390 ч. и стандартным отклонением 1360 ч. Известно, что продолжительность работы имеет нормальное распределение. Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 1020 ламп. Найдите вероятность того, что:

- 2.1)  $X < 9307$  ч.
- 2.2)  $X > 9280$  ч.
- 2.3)  $9460$  ч.  $< X < 9473$  ч.
- 2.4)  $9280$  ч.  $< X < 9419$  ч.

**Задача №3**

В отделе технического контроля (ОТК) завода из задачи №2 проводится контроль выпущенной партии ламп. Тестируется нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 9390 ч. (стандарт)" против односторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп меньше 9390 ч. (брак)". Тест проводится следующим образом: Измеряется величина  $X$  – средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 1020 ламп. Если  $X > 9320$  ч., то нулевая гипотеза не отвергается.

- 3.1) Каков статистический размер этого теста?
- 3.2) Какова статистическая мощность рассмотренного теста, если нам известно, что, на самом деле, средняя продолжительность работы ламп не изменилась и равна 9390 ч., а стандартное отклонение составило 3337 ч.

**Задача №4**

В результате анализа получено, что средняя продолжительность работы выбранных случайным образом 1020 ламп, выпущенных заводом из задачи №2, составила 9293 ч.

На каких стандартных уровнях значимости (1%, 5% и 10%) отвергается (на каких - не отвергается) нулевая гипотеза  $H_0$ : "Средняя продолжительность работы ламп равна 9390 ч." против двухсторонней альтернативной гипотезы  $H_1$ : "Средняя продолжительность работы ламп НЕ равна 9390 ч." (Стандартное отклонение такое же, как и в задаче №2.)

**Задача №5**

Проводится опрос 40740 случайно выбранных потенциальных избирателей. 20991 респондентов ответили, что будут голосовать за "нашего" кандидата, а остальные 19749 – за его соперника. Пусть  $R$  – доля всех избирателей, которые собираются отдать "голос" за "нашего" кандидата.

- 5.1) Используя результаты опроса, оцените величину  $R$  и её стандартное отклонение.
- 5.2) Постройте 90% доверительный интервал для оценки величины  $R$ .

**Задача №6**

В течение года ураган может нанести повреждения дому. Повреждения происходят случайным образом. Пусть  $U$  (в у.е.) – размер повреждений в данном году. Пусть в 9% случаев  $U = 94900$  у.е., в остальных случаях  $U = 0$ .

- 6.1) Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение для среднего выборочного  $\bar{U}$  по выборке из 8560 домов (дома выбираются независимо).
- 6.2) Какова вероятность того, что  $\bar{U}$  больше 9116 у.е.
- 6.3) Чему должно быть равно  $n$  – количество домов в выборке, если вероятность того, что среднее выборочное  $\bar{U}$  меньше 7850 у.е. составила 0,5%?

**Задача №7**

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 19,1% и стандартным отклонением 11,2%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 9% и стандартным отклонением 5,1%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,215.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 90% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

**Задача №8**

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	3,4	9,8	15,9	21,0	25,2	29,1	17,400
Y	2,2	5,9	16,1	17,7	24,5	14,3	13,450
X <sup>2</sup>	11,56	96,04	252,81	441,00	635,04	846,81	380,543
Y <sup>2</sup>	4,84	34,81	259,21	313,29	600,25	204,49	236,148
XY	7,48	57,82	255,99	371,70	617,40	416,13	287,753

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

**Задача №9**

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 65214(\pm 21173) + 10158(\pm 3298) X_1(i) + 24336(\pm 21070) X_2(i) + 1345(\pm 2242) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Женщины без высшего образования 32 лет"?

9.3) Постройте 99% доверительный интервал для различия доходов "Женщины без высшего образования 32 лет" и "Мужчины без высшего образования 32 лет".

**Задача №10**

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 5,302(\pm 2,571) + 0,409(\pm 0,649) \ln X_1(i) + 0,009(\pm 0,014) X_2(i) + 0,11(\pm 0,07) X_3(i) + 0,079(\pm 0,064) X_4(i) + 0,018(\pm 0,058) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,289; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 50% и количество спален уменьшилось на 3. Постройте 90% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом испортить «прекрасный вид». Постройте 95% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,8403$	$\sigma(X) = 0,3663$	$E(Y   X = 0) = 0,7232$
$E(Y) = 0,6892$	$\sigma(Y) = 0,4628$	$E(Y   X = 1) = 0,6827$
$E(XY) = 0,5737$	$\text{cov}(X; Y) = -0,0054$	$E(X   Y = 0) = 0,8578$
	$\text{corr}(X; Y) = -0,0319$	$E(X   Y = 1) = 0,8324$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 42,583 часов.

2.1) 2,5%                      2.2) 99,5%                      2.3) 2,5%                      2.4) 74,5%

**Задачи №3–4**

3.1) 5%                      3.2) 25%                      4) Отвергаем на 5% и 10%; НЕ отвергаем на 1% уровне значимости.

**Задача №5**R = 0,51524                       $\sigma = 0,00248$                       [0,51117; 0,51931]**Задачи №6**6.1) E = 8541,00 у.е.                       $\sigma = 293,54$  у.е.                      6.2) 2,5%                      6.3) 10283 шт.**Задача №7**W = 0,1082                      R<sub>опт</sub> = 10,093%                       $\sigma_{\text{опт}} = 4,952\%$                       [1,97%; 18,21%]**Задача №8**

$D(X) = 93,3396$	$\sigma(X) = 9,6612$	$\text{Cov}(X; Y) = 64,4676$
$D(Y) = 66,2946$	$\sigma(Y) = 8,1421$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,8195$
$\beta_1 = 0,6907$	$\beta_0 = 1,4318$	
TSS = 331,473	ESS = 222,6317	RSS = 108,8413
R <sup>2</sup> = 0,6716	R <sup>2</sup> <sub>adj</sub> = 0,5896	F = 8,1819

Модель ЗНАЧИМА на 5% уровне значимости и НЕ Значима на 1%.

**Задача №9**9.1)  $t_0 = 3,08$  \*\*\*                       $t_1 = 3,08$  \*\*\*  
 $t_2 = 1,16$  не знач.                       $t_3 = 0,6$  не знач.

9.2) Y = 108 254 руб.

9.3)  $\Delta Y = 10 158$                        $\sigma = 3 298$                       [1649,2; 18666,8]**Задачи №10**10.1)  $\Delta \ln Y = 0,1388$                        $\sigma(\Delta \ln Y) = 0,2542$                       [-0,2781; 0,5557]  
 $Y_2/Y_1 = 1,1489$  (Увеличилась на 14,89%)                      [-24,28%; 74,32%]10.2)  $\Delta \ln Y = 0,031$                        $\sigma(\Delta \ln Y) = 0,0948$                       [-0,1548; 0,2168]  
 $Y_2/Y_1 = 1,0315$  (Увеличилась на 3,15%)                      [-14,34%; 24,21%]





**Задача №7**

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 14,5% и стандартным отклонением 7,1%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 5,4% и стандартным отклонением 3,5%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,249.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 99% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

**Задача №8**

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	0,2	5,8	16,4	23,0	25,7	32,6	17,283
Y	3,0	9,6	13,2	26,9	45,0	44,7	23,733
X <sup>2</sup>	0,04	33,64	268,96	529,00	660,49	1062,76	425,815
Y <sup>2</sup>	9,00	92,16	174,24	723,61	2025,00	1998,09	837,017
XY	0,60	55,68	216,48	618,70	1156,50	1457,22	584,197

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

**Задача №9**

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 49511(\pm 16075) + 7324(\pm 6341) X_1(i) + 24740(\pm 8032) X_2(i) + 1047(\pm 1745) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Мужчины без высшего образования 22 лет"?

9.3) Постройте 90% доверительный интервал для различия доходов "Мужчины без высшего образования 22 лет" и "Мужчины с высшим образованием 22 лет".

**Задача №10**

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 4,07(\pm 1,836) + 0,532(\pm 0,591) \ln X_1(i) + 0,008(\pm 0,006) X_2(i) + 0,104(\pm 0,104) X_3(i) + 0,046(\pm 0,028) X_4(i) + 0,008(\pm 0,025) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,729; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 33% и количество спален уменьшилось на 1. Постройте 99% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом испортить «прекрасный вид». Постройте 95% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,4488$	$\sigma(X) = 0,4974$	$E(Y   X = 0) = 0,5047$
$E(Y) = 0,6201$	$\sigma(Y) = 0,4854$	$E(Y   X = 1) = 0,7618$
$E(XY) = 0,3419$	$\text{cov}(X; Y) = 0,0636$	$E(X   Y = 0) = 0,2814$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,2634$	$E(X   Y = 1) = 0,5514$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 49,283 часов.

2.1) 0,5%	2.2) 5%	2.3) 22,5%	2.4) 94,5%
-----------	---------	------------	------------

**Задачи №3–4**

3.1) 2,5%	3.2) 95%	4) Отвергаем на 5% и 10%; НЕ отвергаем на 1% уровне значимости.
-----------	----------	---

**Задача №5**

$R = 0,25545$	$\sigma = 0,00186$	$[0,25180; 0,25910]$
---------------	--------------------	----------------------

**Задачи №6**

6.1) $E = 14794,00$ у.е.	$\sigma = 271,51$ у.е.	6.2) 75%	6.3) 4503 шт.
--------------------------	------------------------	----------	---------------

**Задача №7**

$W = 0,1206$	$R_{\text{опт}} = 6,497\%$	$\sigma_{\text{опт}} = 3,394\%$	$[-2,26\%; 15,25\%]$
--------------	----------------------------	---------------------------------	----------------------

**Задача №8**

$D(X) = 152,5355$	$\sigma(X) = 12,3505$	$\text{Cov}(X; Y) = 208,8235$
$D(Y) = 328,5141$	$\sigma(Y) = 18,125$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,9329$
$\beta_1 = 1,369$	$\beta_0 = 0,0726$	
$\text{TSS} = 1\ 642,5705$	$\text{ESS} = 1\ 429,4133$	$\text{RSS} = 213,1572$
$R^2 = 0,8702$	$R^2_{\text{adj}} = 0,8378$	$F = 26,8236$

Модель ЗНАЧИМА на всех уровнях значимости.

**Задача №9**

9.1)	$t_0 = 3,08$ ***	$t_1 = 1,16$ не знач.
	$t_2 = 3,08$ ***	$t_3 = 0,6$ не знач.

9.2)  $Y = 79\ 869$  руб.

9.3) $\Delta Y = 24\ 740$	$\sigma = 8\ 032$	$[11567,5; 37912,5]$
---------------------------	-------------------	----------------------

**Задачи №10**

10.1) $\Delta \text{Ln} Y = 0,1437$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,1642$	$[-0,2799; 0,5673]$
$Y_2/Y_1 = 1,1545$ (Увеличилась на 15,45%)		$[-24,41\%; 76,35\%]$
10.2) $\Delta \text{Ln} Y = 0,058$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,1077$	$[-0,1531; 0,2691]$
$Y_2/Y_1 = 1,0597$ (Увеличилась на 5,97%)		$[-14,2\%; 30,88\%]$



## Тестовый Вариант № КР1-50 (2023/24)

(продолжение)

### Задача №7

Предположим, что Вы инвестируете долю  $W$  Ваших свободных средств в портфель акций и остальные средства  $(1 - W)$  в портфель облигаций. Пусть  $R_1$  – доходность портфеля акций: случайная величина со средним значением 18,7% и стандартным отклонением 6,5%; и  $R_2$  – доходность портфеля облигаций: случайная величина со средним значением 12,2% и стандартным отклонением 5,2%. Корреляция между  $R_1$  и  $R_2$  равна 0,478.

7.1) При каком значении  $W$  риск (дисперсия) Ваших вложений будет минимальным?

7.2) Постройте 90% доверительный интервал для значения доходности такого портфеля, который соответствует полученному минимальному риску.

### Задача №8

Дано равновероятное совместное распределение двух случайных величин:

							Среднее
X	8,5	14,5	21,3	29,4	35,9	39,6	24,867
Y	11,2	32,9	97,2	169,6	85,3	85,9	80,350
X <sup>2</sup>	72,25	210,25	453,69	864,36	1288,81	1568,16	742,920
Y <sup>2</sup>	125,44	1082,41	9447,84	28764,16	7276,09	7378,81	9012,458
XY	95,20	477,05	2070,36	4986,24	3062,27	3401,64	2348,793

Найдите:

8.1) Выборочные дисперсии и стандартные отклонения  $\sigma(X)$  и  $\sigma(Y)$ ; выборочную ковариацию  $\text{cov}(X; Y)$  и корреляцию  $\text{corr}(X; Y)$ .

8.2) Коэффициенты парной линейной регрессии  $Y(i) = \beta_0 + \beta_1 X(i) + u(i)$  (МНК).

8.3) Остатки TSS, ESS, RSS; коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

8.4) Для построенной регрессии рассчитайте статистику теста Фишера и определите значимость построенной регрессии на уровнях значимости 1%, 5%, 10% и 50%.

### Задача №9

Анализируется множественная линейная регрессия:

$$\hat{Y}(i) = 46990(\pm 40684) + 6224(\pm 2021) X_1(i) + 19700(\pm 10944) X_2(i) + 981(\pm 432) X_3(i)$$

где  $\hat{Y}$  – средняя зарплата, руб. некоторой профессиональной категории (объясненное значение);  $X_1$  – пол (0 = женщина, 1 = мужчина);  $X_2$  – наличие высшего образования (1 = есть, 0 = нет);  $X_3$  – возраст (лет). В скобках ( $\pm \dots$ ) приведены стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

9.1) Укажите значимость (1%, 5% или 10% по двустороннему критерию) каждого коэффициента регрессии.

9.2) Какой средний доход предсказывает эта регрессия для "Женщины с высшим образованием 24 лет"?

9.3) Постройте 95% доверительный интервал для различия доходов "Женщины с высшим образованием 24 лет" и "Мужчины с высшим образованием 24 лет".

### Задача №10

Анализируется множественная нелинейная регрессия:

$$\ln \hat{Y}(i) = 4,014(\pm 2,087) + 0,447(\pm 0,797) \ln X_1(i) + 0,006(\pm 0,011) X_2(i) + 0,106(\pm 0,092) X_3(i) + 0,028(\pm 0,123) X_4(i) + 0,007(\pm 0,047) X_3(i) X_4(i)$$

где  $\hat{Y}$  – цена дома у.е. (объясненное значение);  $X_1$  – площадь дома;  $X_2$  – количество спален;  $X_3$  – наличие бассейна (0 = нет, 1 = есть);  $X_4$  – наличие прекрасного вида (0 = нет, 1 = есть); корреляция между коэффициентами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равна 0,88; все остальные коэффициенты попарно независимы.

10.1) Какое изменение цены дома предсказывает эта регрессия, если площадь дома увеличилась на 8% и количество спален увеличилось на 3. Постройте 99% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

10.2) Как изменится цена дома, имеющего «прекрасный вид», у которого не было бассейна, если к дому добавить бассейн и при этом НЕ испортить «прекрасный вид». Постройте 95% доверительный интервал для предсказанного изменения цены в этом случае.

В задачах №9 и №10 считаем, что количество наблюдений достаточно большое и при построении доверительных интервалов можно воспользоваться критическими значениями нормального распределения.

**Задача №1**

$E(X) = 0,5439$	$\sigma(X) = 0,4981$	$E(Y   X = 0) = 0,4352$
$E(Y) = 0,4713$	$\sigma(Y) = 0,4992$	$E(Y   X = 1) = 0,5016$
$E(XY) = 0,2728$	$\text{cov}(X; Y) = 0,0165$	$E(X   Y = 0) = 0,5128$
	$\text{corr}(X; Y) = 0,0664$	$E(X   Y = 1) = 0,5788$

**Задачи №2**

Стандартное отклонение среднего выборочного: 44,799 часов.

2.1) 99,5%	2.2) 75%	2.3) 74,5%	2.4) 2,5%
------------	----------	------------	-----------

**Задачи №3–4**

3.1) 2,5%	3.2) 97,5%	4) Отвергаем на 10%; НЕ отвергаем на 1% и 5% уровнях значимости.
-----------	------------	--

**Задача №5**

$R = 0,62451$	$\sigma = 0,00208$	$[0,62110; 0,62792]$
---------------	--------------------	----------------------

**Задачи №6**

6.1) $E = 28246,00$ у.е.	$\sigma = 902,16$ у.е.	6.2) 2,5%	6.3) 10964 шт.
--------------------------	------------------------	-----------	----------------

**Задача №7**

$W = 0,2943$	$R_{\text{опт}} = 14,113\%$	$\sigma_{\text{опт}} = 4,882\%$	$[6,11\%; 22,12\%]$
--------------	-----------------------------	---------------------------------	---------------------

**Задача №8**

$D(X) = 149,4628$	$\sigma(X) = 12,2255$	$\text{Cov}(X; Y) = 420,8755$
$D(Y) = 3\,067,6026$	$\sigma(Y) = 55,3859$	$\text{Corr}(X; Y) = 0,6216$
$\beta_1 = 2,8159$	$\beta_0 = 10,327$	
$\text{TSS} = 15\,338,013$	$\text{ESS} = 5\,925,7617$	$\text{RSS} = 9\,412,2513$
$R^2 = 0,3863$	$R^2_{\text{adj}} = 0,2329$	$F = 2,5183$

Модель ЗНАЧИМА на 50% уровне значимости и НЕ Значима на 10%.

**Задача №9**

9.1)	$t_0 = 1,15$ не знач.	$t_1 = 3,08$ ***
	$t_2 = 1,8$ *	$t_3 = 2,27$ **

9.2)	$Y = 90\,234$ руб.
------	--------------------

9.3) $\Delta Y = 6\,224$	$\sigma = 2\,021$	$[2262,8; 10185,2]$
--------------------------	-------------------	---------------------

**Задачи №10**

10.1) $\Delta \text{Ln} Y = 0,0524$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,0917$	$[-0,1842; 0,289]$
$Y_2/Y_1 = 1,0538$ (Увеличилась на 5,38%)		$[-16,82\%; 33,51\%]$
10.2) $\Delta \text{Ln} Y = 0,113$	$\sigma(\Delta \text{Ln} Y) = 0,1033$	$[-0,0895; 0,3155]$
$Y_2/Y_1 = 1,1196$ (Увеличилась на 11,96%)		$[-8,56\%; 37,09\%]$