Вопросы экзамена

1. *Первообразная и неопределенный интеграл*
   1.1. Дайте определения первообразной и неопределенного интеграла.
   1.2. Докажите, что множество всех первообразных состоит из функций, отличающихся на константу.
   1.3. Сформулируйте и обоснуйте арифметические свойства интегрирования.
   1.4. Сформулируйте и обоснуйте правило замены переменной интегрирования и правило интегрирования по частям для неопределенных интегралов.
   1.5. Обоснуйте, что рациональная функция $R(\sin x, \cos x)$ всегда интегрируема в элементарных функциях.
   1.6. Опишите универсальную тригонометрическую подстановку, получите (*на чистом листе*) выражения для $\sin x,\ \cos x,\ dx$.

2. *Комплексные числа, многочлены*
   2.1. Дайте определение комплексных чисел. Сформулируйте запись комплексного числа в тригонометрической и экспоненциальной формах, поясните геометрический смысл. Сформулируйте правила возведения в степень и извлечение корней комплексных чисел (формула Муавра).
   2.2. Сформулируйте, что такое: алгебраический многочлен, правила сложения и умножения многочленов, процедура деления многочленов с остатком. Приведите примеры.
   2.3. Докажите теорему Безу о делении без остатка многочлена $P(x)$ на $(x-z)$, где z – корень (комплексный) многочлена $P(x)$.
   2.4. Докажите, что алгебраический многочлен степени *n* имеет хотя бы один корень и раскладывается в произведение: $Q_n(x) = a_n(x-z_1)^{\lambda_1}(x-z_2)^{\lambda_2}\dots(x-z_m)^{\lambda_m}$, где z_i – комплексные корни кратности λ_i.
   2.5. Сформулируйте и обоснуйте, на произведение каких неприводимых множителей (с действительными коэффициентами) раскладывается алгебраический многочлен степени *n* с действительными коэффициентами. Докажите, что если z – действительный корень кратности λ алгебраического многочлена $Q(x)$ с действительными коэффициентами, то правильную рациональную дробь $P(x)/Q(x)$ можно представить в виде:
   $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-z)^\lambda} + \frac{p(x)}{(x-z)^{\lambda-k}q(x)}$$
   где последняя дробь является правильной.
   2.6. Докажите, что если $z = u + iv$ – комплексный корень кратности λ алгебраического многочлена $Q(x)$ с действительными коэффициентами, то правильную рациональную дробь $P(x)/Q(x)$ можно представить в виде:
   $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2-2ux+b)^\lambda} + \frac{p(x)}{(x^2-2ux+b)^{\lambda-k}q(x)}$$
   где последняя дробь является правильной ($b = u^2 + v^2$).

3. *Интегрирование рациональных функций*
   3.1. Сформулируйте и обоснуйте, на сумму каких простейших дробей с действительными коэффициентами можно разложить правильную рациональную дробь многочленов с действительными коэффициентами.
   3.2. Дайте определение набольшего общего делителя (НОД) многочленов (алгоритм Евклида).
   3.3. Получите рекуррентную формулу для вычисления интеграла
   $$\int \frac{a^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx$$

4. *Определенный интеграл*
    4.1. Дайте определение интеграла Римана. Приведите обоснованные примеры интегрируемой и неинтегрируемой функций.
    4.2. Дайте определение сумм Дарбу, докажите необходимое и достаточное условие интегрируемости.
    4.3. Докажите, что непрерывная на отрезке функция является равномерно непрерывной и, следовательно, интегрируемой.
    4.4. Докажите, что монотонная на отрезке функция интегрируема.
    4.5. Сформулируйте и докажите интегральную теорему о среднем.
    4.6. Сформулируйте и докажите неравенство Юнга и неравенство Гёльдера для интегралов.

5. *Свойства определенных интегралов*
    5.1. Получите, чему равна производная определенного интеграла по пределу интегрирования.
    5.2. Сформулируйте и докажите формулу Ньютона–Лейбница.
    5.3. Сформулируйте и обоснуйте правило вычисления длины дуги кривой, заданной на плоскости параметрически функциями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.
    5.4. Дайте определение несобственного интеграла первого и второго рода. Приведите примеры.
    5.5. Дайте определение главного значения несобственного интеграла (по Коши). Приведите примеры функций, интегрируемых в смысле главного значения по Коши, но неинтегрируемых в несобственном смысле.

6. *Кратные интегралы*
    6.1. Сформулируйте понятие и геометрический смысл двойного интеграла.
    6.2. Вычислите интеграл Эйлера–Пуассона: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

7. *Дифференциальные уравнения*
    7.1. Сформулируйте, что такое дифференциальное уравнение. Сформулируйте, что такое дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной.
    7.2. Докажите теорему о существовании и единственности решения дифференциального уравнения, разрешенного относительно производной. Приведите пример уравнения, не удовлетворяющего условиям этой теоремы и имеющего несколько решений, проходящих через одну точку.
    7.3. Сформулируйте, что такое дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными и обоснуйте процедуру решения таких уравнений.
    7.4. Сформулируйте, что такое дифференциальные уравнения в полных дифференциалах, и обоснуйте процедуру решения таких уравнений.

8. *Линейные дифференциальные уравнения*
    8.1. Сформулируйте, что такое линейные дифференциальные уравнения порядка ***n*** с постоянными коэффициентами.
    8.2. Докажите, что линейная комбинация решений однородного линейного дифференциального уравнения порядка ***n*** с постоянными коэффициентами также является решением этого уравнения.
    8.3. Докажите, что сумма решения неоднородного линейного дифференциального уравнения порядка ***n*** с постоянными коэффициентами и решения соответствующего однородного уравнения является решением этого неоднородного уравнения.

8.4. Получите, какая функция является общим решением однородного линейного дифференциального уравнения порядка ***n*** с постоянными коэффициентами в случае, когда все корни соответствующего характеристического уравнения являются действительными и имеют единичную кратность.

8.5. Получите, какая функция является решением однородного линейного дифференциального уравнения порядка ***n*** с постоянными коэффициентами в случае, когда соответствующее характеристическое уравнение имеет действительные кратные корни.

8.6. Получите, какая функция является решением однородного линейного дифференциального уравнения порядка ***n*** с постоянными коэффициентами в случае, когда соответствующее характеристическое уравнение имеет комплексные корни единичной кратности.

9. *Система линейных дифференциальных уравнений*

9.1. Сформулируйте, что такое система линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Покажите, как линейное дифференциальное уравнение порядка ***n*** с постоянными коэффициентами сводится к системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.

9.2. Сформулируйте, как получить решение системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами в матричном виде. Ответ обоснуйте. Сформулируйте, что такое возведение **exp** в матричную степень и какими свойствами обладает эта операция.

9.3. Сформулируйте и обоснуйте, как, пользуясь понятием собственных векторов и собственных значений матрицы, преобразовать матричное решение системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами в сумму решений, соответствующих собственным векторам матрицы.

10. *Числовые и степенные ряды*

10.1. Дайте определение сходящегося числового ряда, приведите примеры.

10.2. Сформулируйте и обоснуйте необходимый признак сходимости числового ряда.

10.3. Для числовых рядов с неотрицательными членами сформулируйте и обоснуйте признаки сравнения.

10.4. Для числовых рядов с неотрицательными членами сформулируйте и обоснуйте признаки сходимости Коши и Даламбера.

10.5. Сформулируйте и обоснуйте интегральный признак (Коши–Маклорена) сходимости числового ряда с неотрицательными членами.

10.6. Дайте определение абсолютно и условно сходящихся числовых рядов, приведите примеры. Докажите, что если ряд сходится абсолютно, то он сходится.

10.7. Сформулируйте и обоснуйте признак сходимости Лейбница для знакочередующегося ряда.

10.8. Сформулируйте и обоснуйте, какие арифметические операции можно производить со сходящимися числовыми рядами.

10.9. Сформулируйте понятие степенного ряда, области сходимости степенного ряда. Получите выражение рядов Маклорена и Тейлора. Обоснуйте на основе теоремы Лагранжа, чему равен остаточный член ряда Тейлора в форме Лагранжа.

10.10. Получите остаточный член формулы Тейлора в интегральной форме.