Теоретические вопросы зачета

Литература

- Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. *Математический анализ* – часть 1, 2. М.: Юрайт, 2020. URL: https://urait.ru/bcode/452409; https://urait.ru/bcode/452410; https://urait.ru/bcode/450170
- Краснова С. А., Уткин В. А. *Математический анализ для экономистов в 2 ч.* – М.: Юрайт, 2020. URL: https://urait.ru/bcode/451081; https://urait.ru/bcode/451479
- Шипачев В. С. *Задачник по высшей математике*: Учебн. пособие для вузов – М.: Инфра-М, 2017.
- Демидович Б. П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу* – М.: Лань, 2017.

1. *Числовые множества и последовательности*

   1.1. Дайте определение ограниченного (неограниченного) сверху (снизу) множества.

   1.2. Дайте определение точных верхней и нижней граней множества.

   1.3. Докажите, что ограниченное множество имеет sup (inf).

   1.4. Дайте определение предела последовательности.

   1.5. Докажите, что монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

2. *Свойства пределов последовательностей*

   Пусть a_n и b_n – сходящиеся последовательности.

   2.1. Докажите, что если $a_n < b_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

   2.2. Сформулируйте и докажите теорему «о двух полицейских» для последовательностей.

   2.3. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ и укажите условия применимости.

   2.4. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ и укажите условия применимости.

   2.5. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = 0$, если последовательность a_n – ограничена и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

   2.6. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \infty$, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \ne 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.

   2.7. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}\right) = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, если $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \ne 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \ne \infty$.

   2.8. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1}{b_n}\right| = +\infty$, если $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

   2.9. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}\right) = 0$, если $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

3. *«Второй замечательный предел»; подпоследовательности; критерий Коши*

   3.1. Докажите методом математической индукции справедливость неравенства Бернулли $\boldsymbol{1 + nx \le (1 + x)^n}$ (при $x > -1$).

   3.2. Докажите, что последовательность $\boldsymbol{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$ сходится.

   3.3. Сформулируйте понятие подпоследовательности и частичного предела последовательности.

   3.4. Докажите теорему Больцано–Вейерштрасса о том, что всякая ограниченная последовательность имеет хотя бы один частичный предел.

   3.5. Сформулируйте и обоснуйте критерий Коши (необходимое и достаточное условие) сходимости последовательности.

4. *Предел функции*

   Сформулируйте и докажите:

   4.1. определения предела функции по Гейне и по Коши (докажите их эквивалентность);

   4.2. арифметические свойства пределов функции;

   4.3. свойство сравнения пределов функций;

   4.4. теорему «о двух полицейских» для пределов функций;

   4.5. чему равен «первый замечательный предел».

5. *Теоремы о непрерывных функциях*
    5.1. Дайте определение непрерывности функции.
    5.2. Сформулируйте и докажите теорему Больцано–Коши о прохождении непрерывной на отрезке функции через ноль при смене знака.
    5.3. Докажите первую теорему Вейерштрасса о том, что непрерывная на отрезке функция ограничена.
    5.4. Докажите вторую теорему Вейерштрасса о том, что непрерывная на отрезке функция достигает на нём своих точных верхней и нижней граней.

6. *Производная функции*
    6.1. Дайте определение производной функции в точке.
    6.2. Вычислите по определению производные функций $\mathbf{const}$, $\mathbf{\sin}\,\boldsymbol{x}$ и $\mathbf{ln}\,\boldsymbol{x}$.
    6.3. Сформулируйте арифметические свойства производных.
    6.4. Докажите по определению производной, что $(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}'$.
    6.5. Докажите по определению производной, что если $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\big)$, то $\boldsymbol{y}'_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{u}'_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})$.
    6.6. Докажите по определению производной, что производная обратной функции $\boldsymbol{y}'_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}) = \Big(\boldsymbol{x}'_{\boldsymbol{y}}\big(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})\big)\Big)^{-\mathbf{1}}$.
    6.7. Как найти производную функции, заданной параметрически? Докажите это, пользуясь известными Вам правилами дифференцирования.

7. *Возрастание, убывание, экстремумы функций*
    7.1. Сформулируйте и докажите достаточное условие возрастания (или убывания) функции в точке.
    7.2. Сформулируйте и докажите теорему Ролля и теорему Лагранжа (на основе теоремы Ролля).
    7.3. Сформулируйте необходимое и достаточное условие экстремума и обоснуйте его на основе теоремы Лагранжа.
    7.4. Докажите постоянство функции, имеющей на интервале равную нулю производную.

8. *Правило Лопиталя*
    8.1. Сформулируйте правило Лопиталя.
    8.2. Докажите правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей $\mathbf{0}/\mathbf{0}$.
    8.3. Докажите правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей ∞/∞.

9. *Выпуклость функции, асимптоты*
    9.1. Дайте определение выпуклости функции и точки перегиба.
    9.2. Сформулируйте и докажите на основе теоремы Лагранжа, достаточное условие выпуклости функции вверх (вниз) на интервале.
    9.3. Сформулируйте и докажите, необходимое условие выпуклости функции вверх (вниз) на интервале.
    9.4. Сформулируйте и обоснуйте необходимое и достаточное условия перегиба функции.
    9.5. Дайте определение асимптоты.
    9.6. Сформулируйте и обоснуйте правило вычисления угла наклона асимптоты.

10. *Ряды Маклорена и Тейлора*
    10.1. Обоснуйте разложения функций в ряды Маклорена и Тейлора.
    10.2. Приведите примеры разложений элементарных функций.
    10.3. Получите остаточный член ряда Тейлора в форме Лагранжа.